Bungee – Sprung eines Eis

Pavel Saviankou

Katrin Fortak

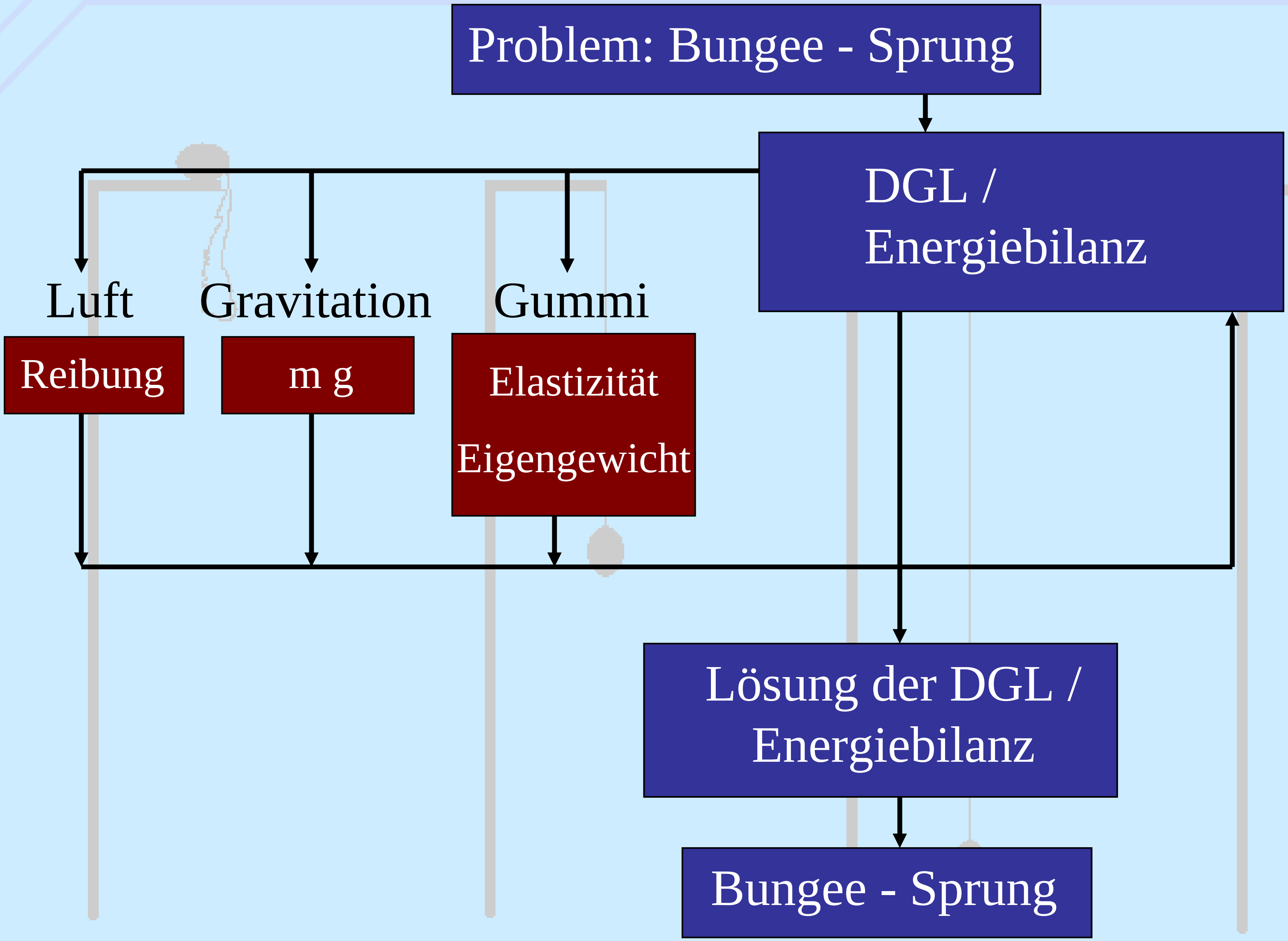
Simone Menzel

Lukas Arnold

Ablauf des Projektes

- Planung des Versuches
- Abschätzungen
- Messungen mit dem Fernrohr
- Der Umstieg auf MPLI
- Lösungsansätze
- Lösung der Energiebilanz
- numerische Lösung der DGL
- Fehler
- Das Experiment
- Fazit

Struktur des Versuches



Abschätzung

<u>Luft</u>

<u>Reibung</u>

Reibung nach Stokes:

$$F_s = 6\pi\eta v r$$

Freier Fall aus 7m:

$$v = \sqrt{2gl} = 11.7\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow F_s = 8.02 \cdot 10^{-5} N$$

➡ vernachlässigbar

<u>Gummi</u>

<u>Eigengewicht</u>

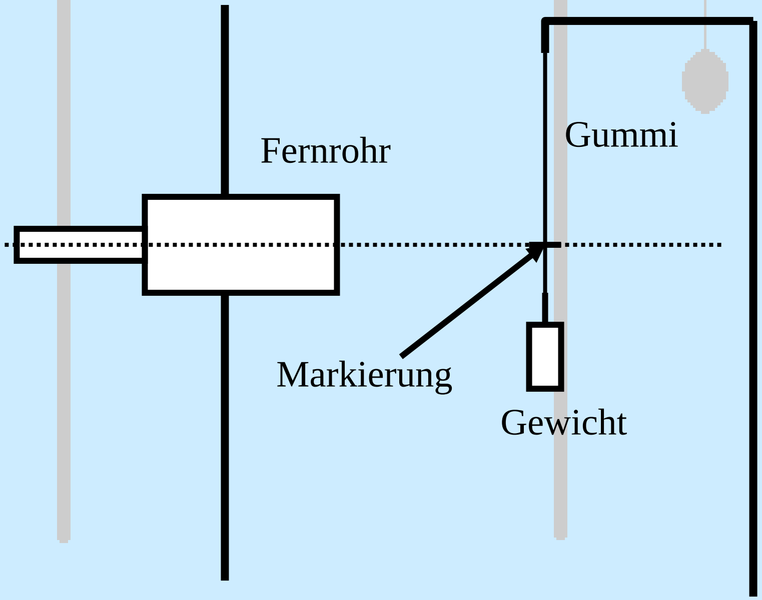
Masse des Eis ist viel größer als die Masse des Gummis

➡ vernachlässigbar

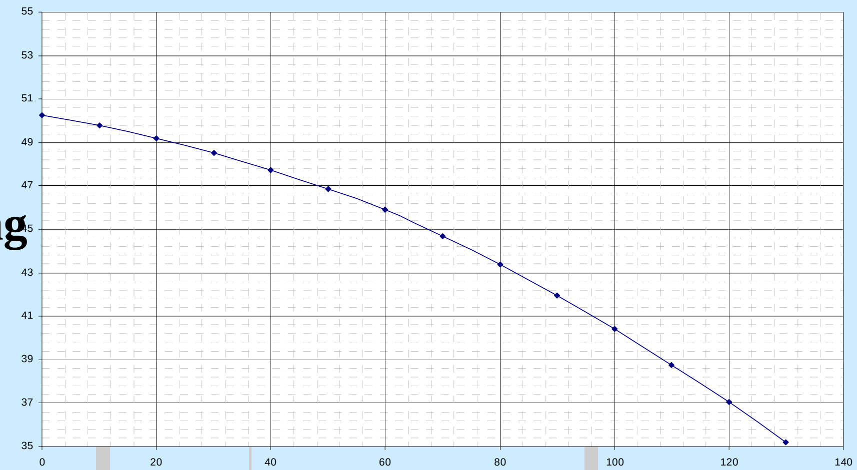
Messungen mit dem Fernrohr

1. Annahme:

Ausdehnung des Gummis ist linear



Aus-
lenkung
/ cm



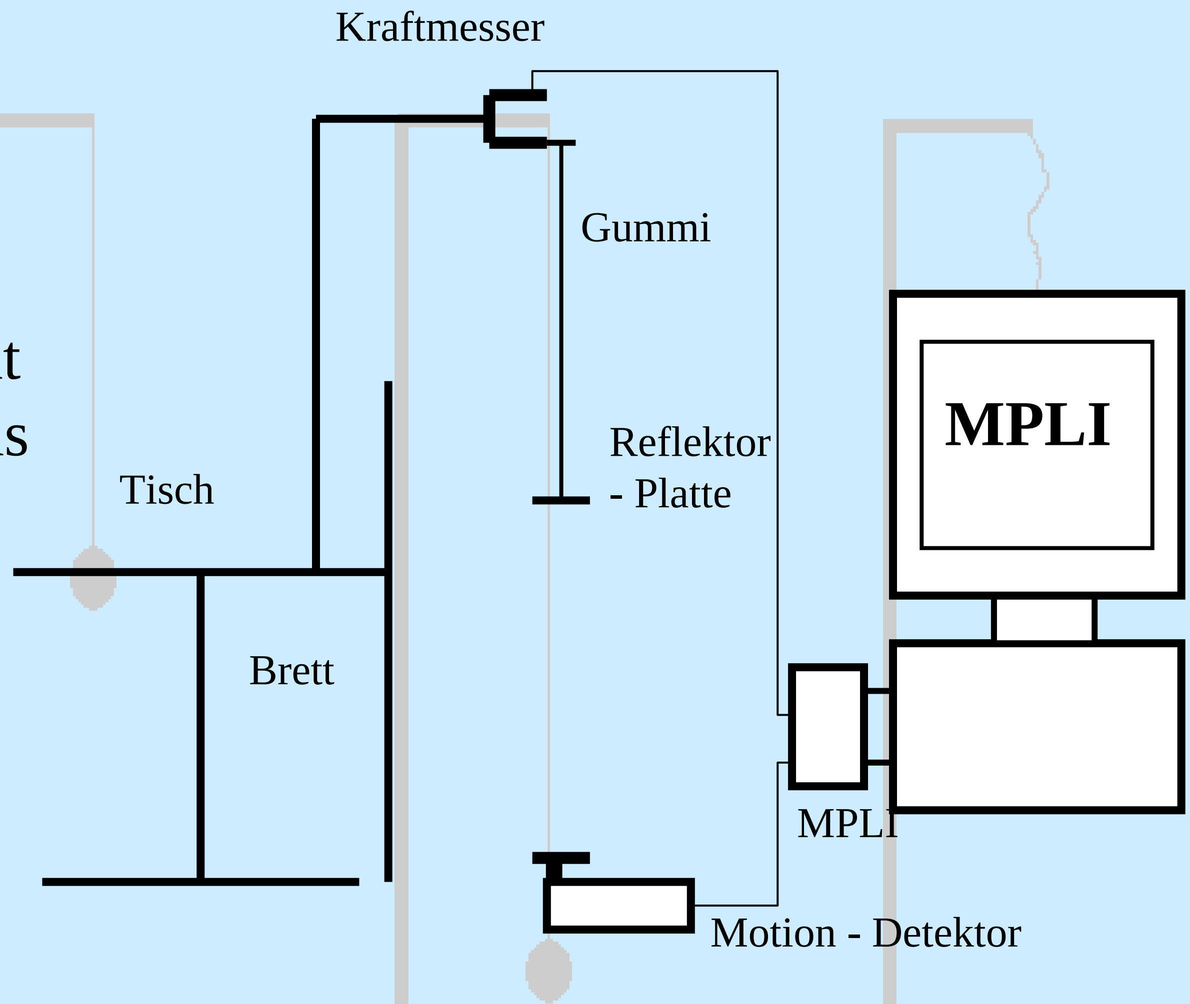
Masse / g

Ausdehnung des Gummis ist nicht linear, aber wie ??

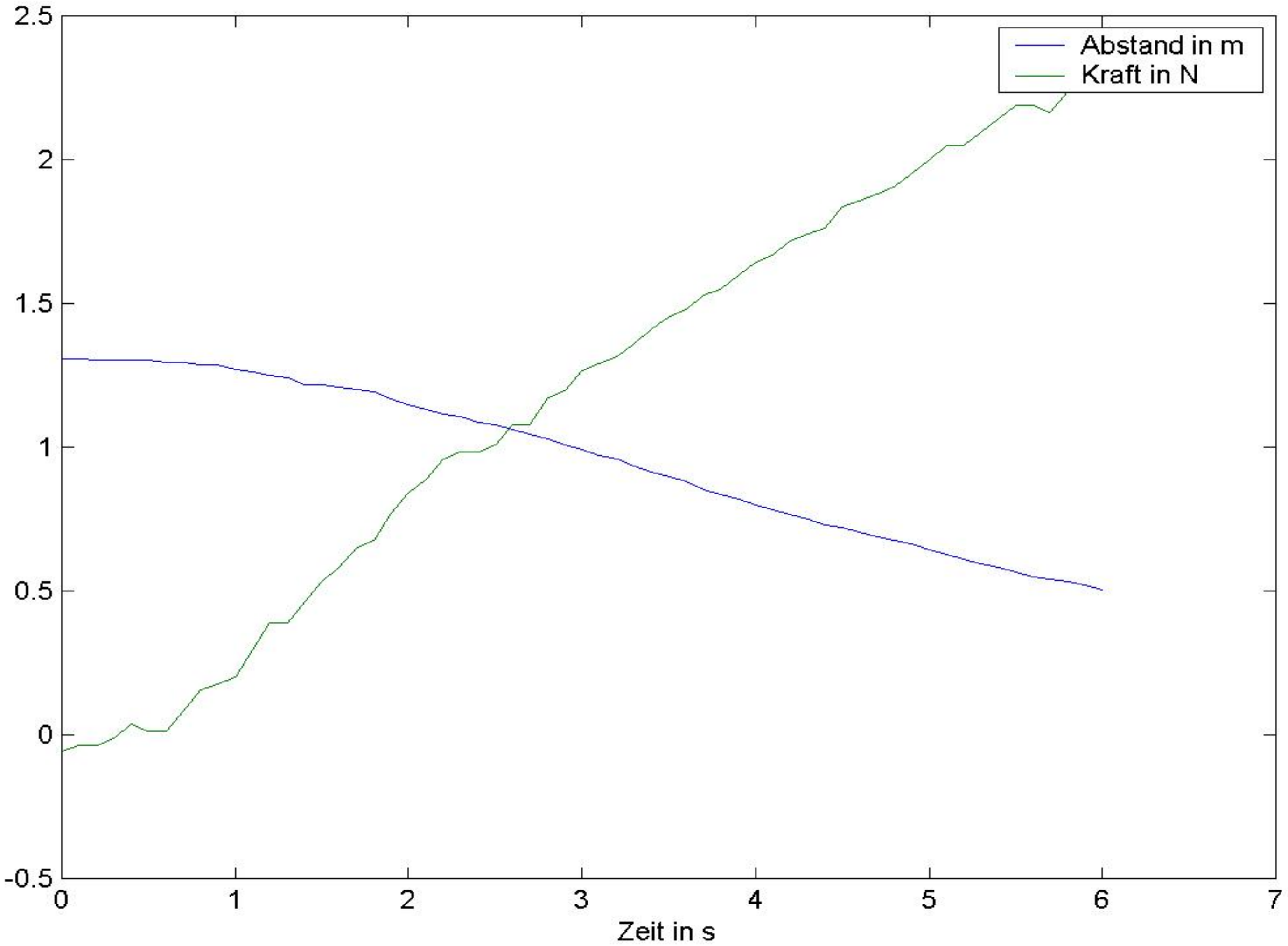
Der Umstieg auf MPLI

Gründe

- höhere Genauigkeit
- das Gummi wird nicht während des Ablesens eines einzelnen Messwertes schon gedehnt
- große Anzahl von Messpunkten



Messreihen



Bearbeitung der Daten

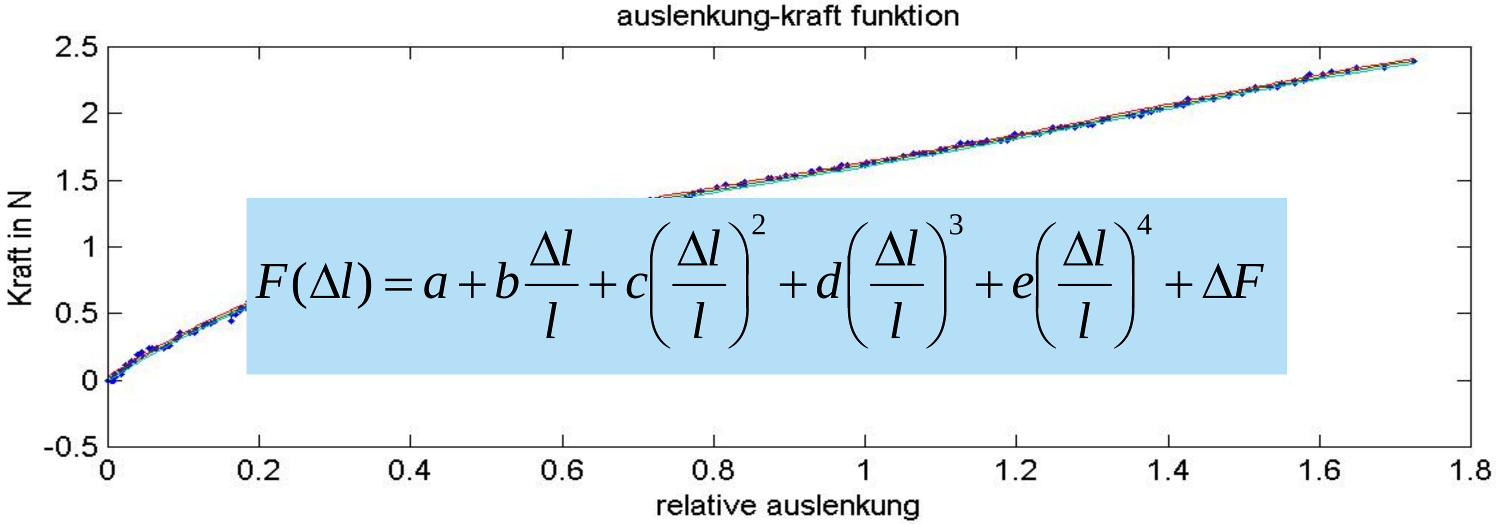
- Auswählen der Daten
  $\Rightarrow$ 1. ziehen

- Skalieren von Kraft und Auslenkung

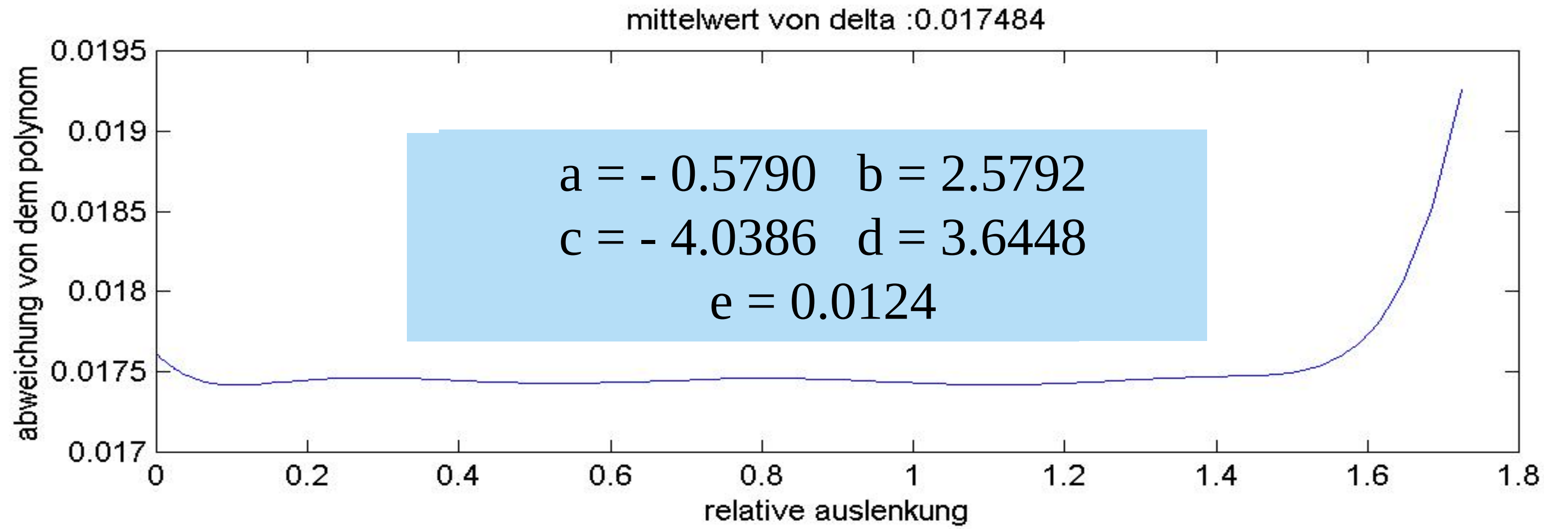
- Interpolieren der Kurve durch Polynom 4. Ordnung nach dem minimalen mittleren quadratischen Fehler

- Fehlerband anstelle von einer einzelnen Kurve
  Das Band gibt einen Bereich an, in dem die Kraft zu erwarten sein wird.

Interpolation

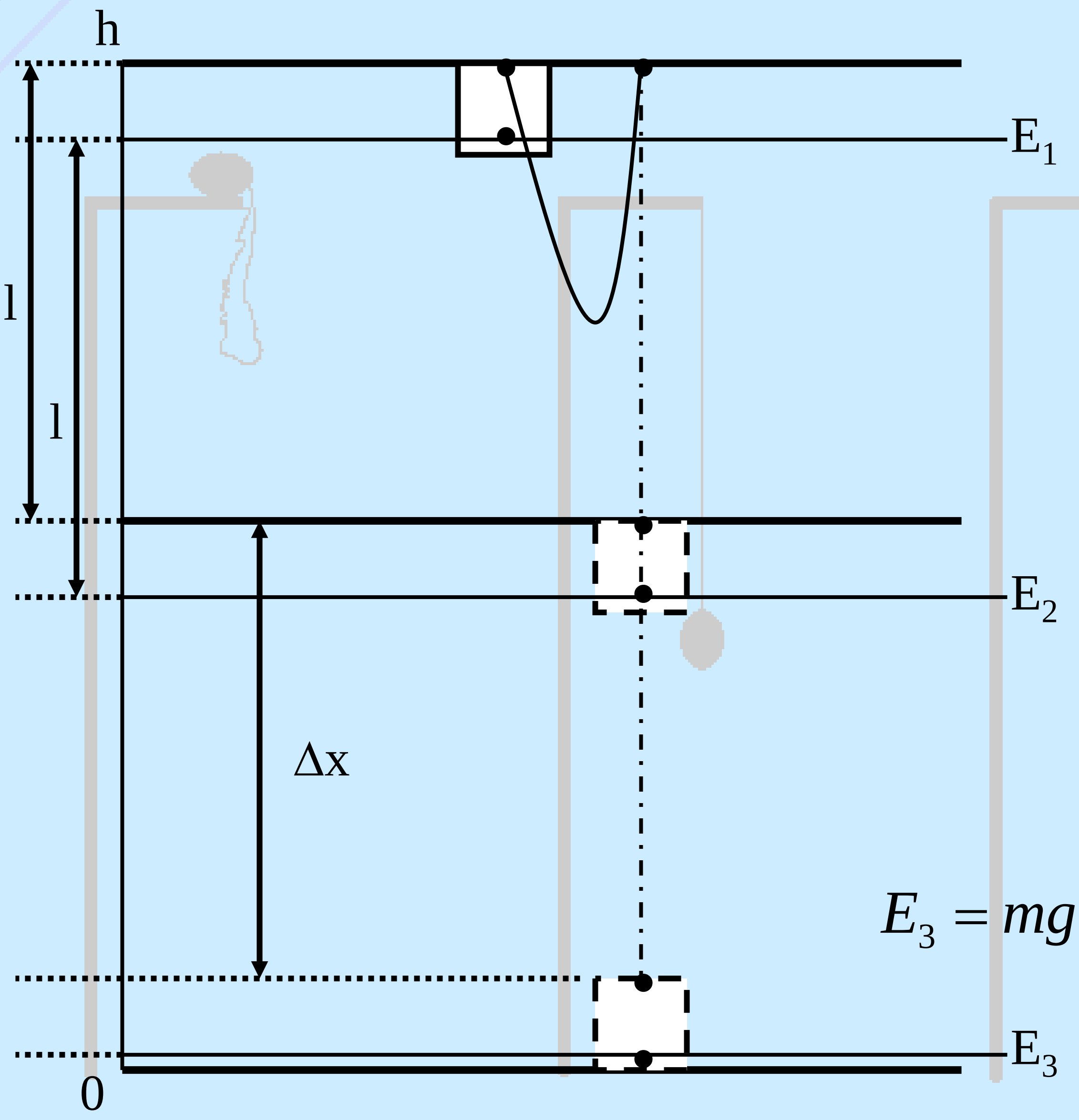


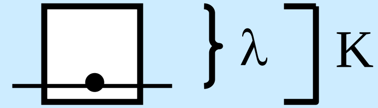
$$F(\Delta l) = a + b\frac{\Delta l}{l} + c\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + d\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^3 + e\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^4 + \Delta F$$



a = - 0.5790   b = 2.5792
c = - 4.0386   d = 3.6448
e = 0.0124

Modell des Bungee-Sprungs





$$E_1 = mg\,(h - \lambda)$$

$$E_2 = mg(h - l - \lambda) + m\frac{v^2}{2}$$

$$E_3 = mg(K - \lambda) + E_{Gummi}(h - l - K)$$

Lösungsansätze

$$E_1 = E_3$$

Energiebilanz

$$mgh = mgK + E_{Gummi}(h - l - K)$$

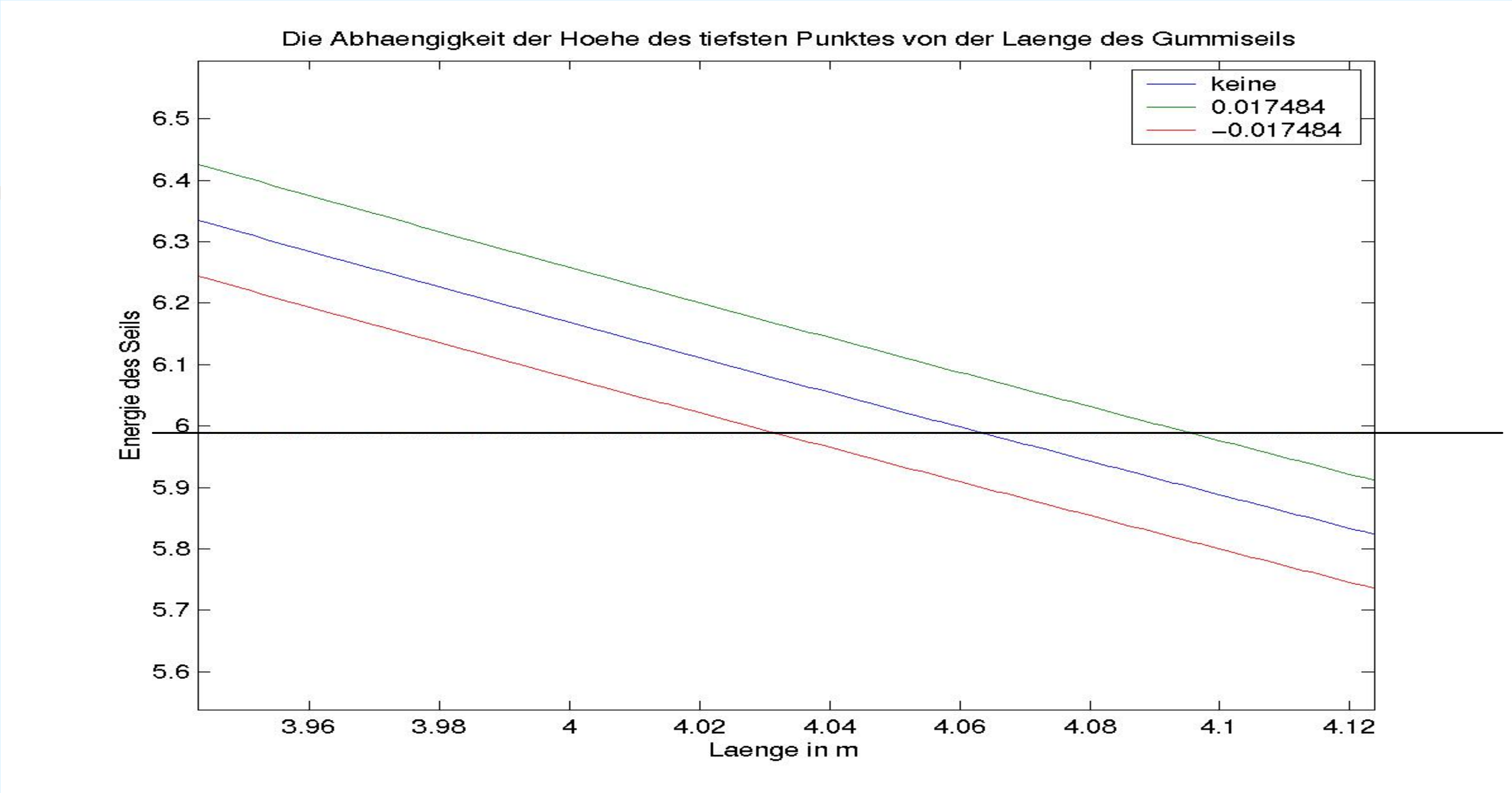
$$E_G(\Delta l) = -\int_0^{\Delta l} F(\Delta x)\, d\Delta x = -a\Delta l - b\frac{\Delta l^2}{2l} - c\frac{\Delta l^3}{3l^2} - d\frac{\Delta l^4}{4l^3} - e\frac{\Delta l^5}{5l^4} + C$$

Differentialgleichung

$$\boxed{m\ddot{x} = -mg + P\left(\frac{h - l - \lambda - x}{l}\right)}$$

$$\ddot{x} = \begin{cases} -g; \forall x > h - l - K \\ -g + \frac{1}{m}\left[a + b\left(\frac{h-l-\lambda-x}{l}\right) + \ldots + e\left(\frac{h-l-\lambda-x}{l}\right)^4\right], \forall x \le h-l-K \end{cases}$$

Lösung der Energiebilanz



$$E_3(l) = mg(K + 0.05m) + E_{Gummi}(h - l - K + 0.05m)$$

$$\stackrel{!}{=}$$

$$E_1(l) = mg(h - \lambda)$$

Numerische Lösung der Differentialgleichung

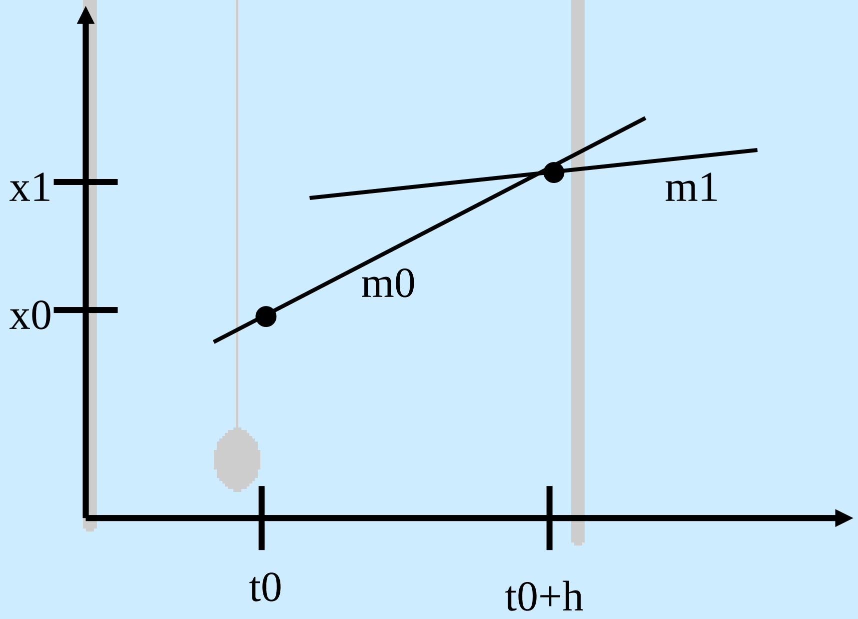
- iterative Verfahren mit Schrittweite h
- nur Lösung von Gleichungen erster Ordnung (→ Systeme)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(x, \dot{x}, t) \\ f_2(x, \dot{x}, t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} f_1 = \dot{x} \\ f_2 = \ddot{x} \end{matrix}$$

Euler - Verfahren

$$\dot{x} = f(x,t)$$

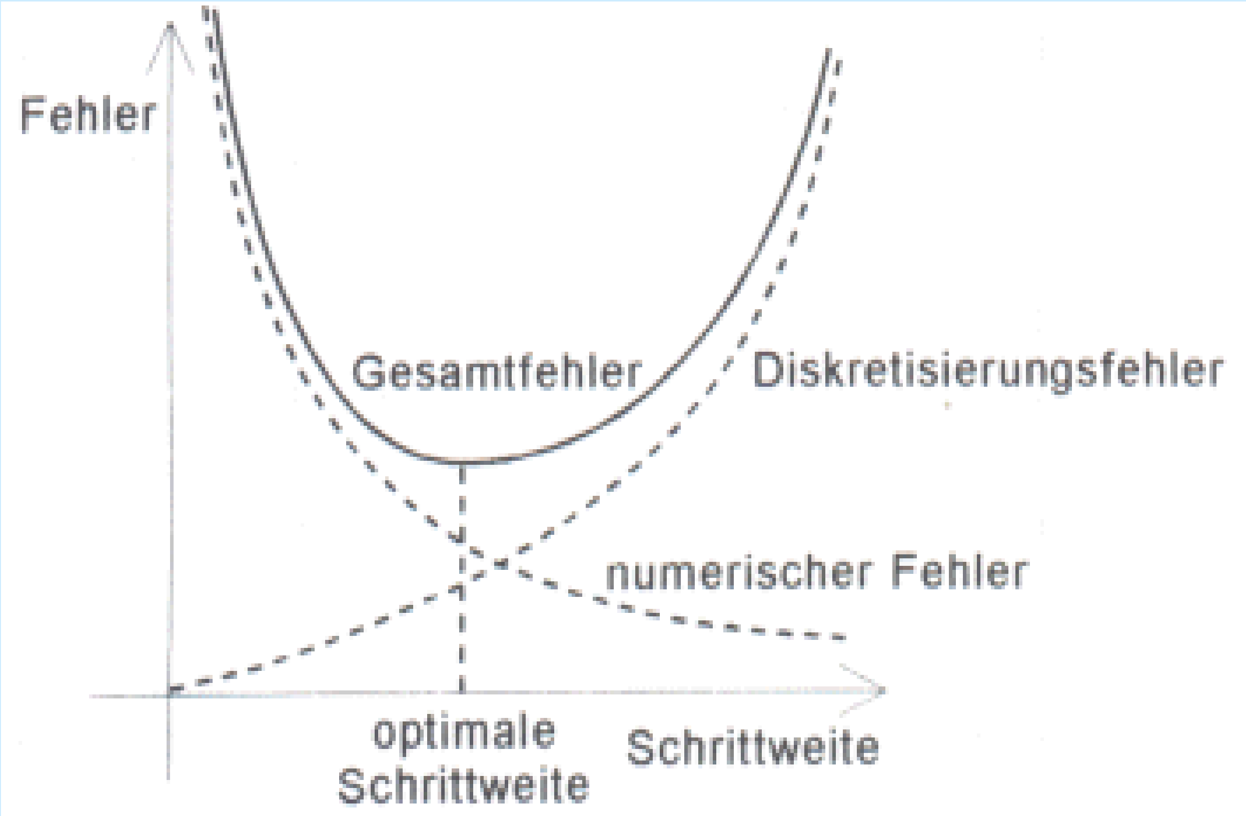
$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x,t) + O(h^2)$$



- hoher Rechenaufwand
- ungenau

Das Runge – Kutta – Verfahren

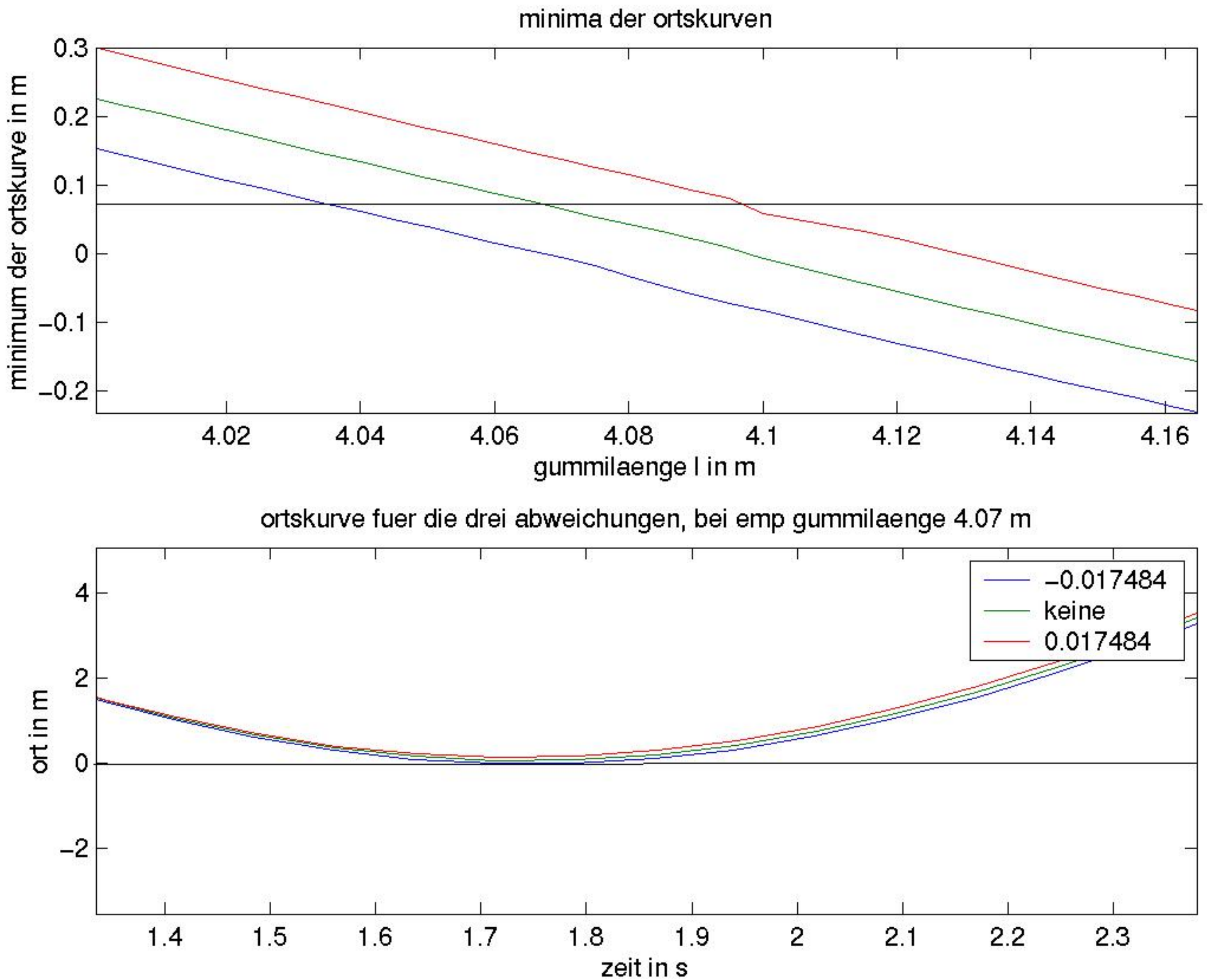
Verfahren 4. Ordnung



$$\dot{x} = f(x, t)$$

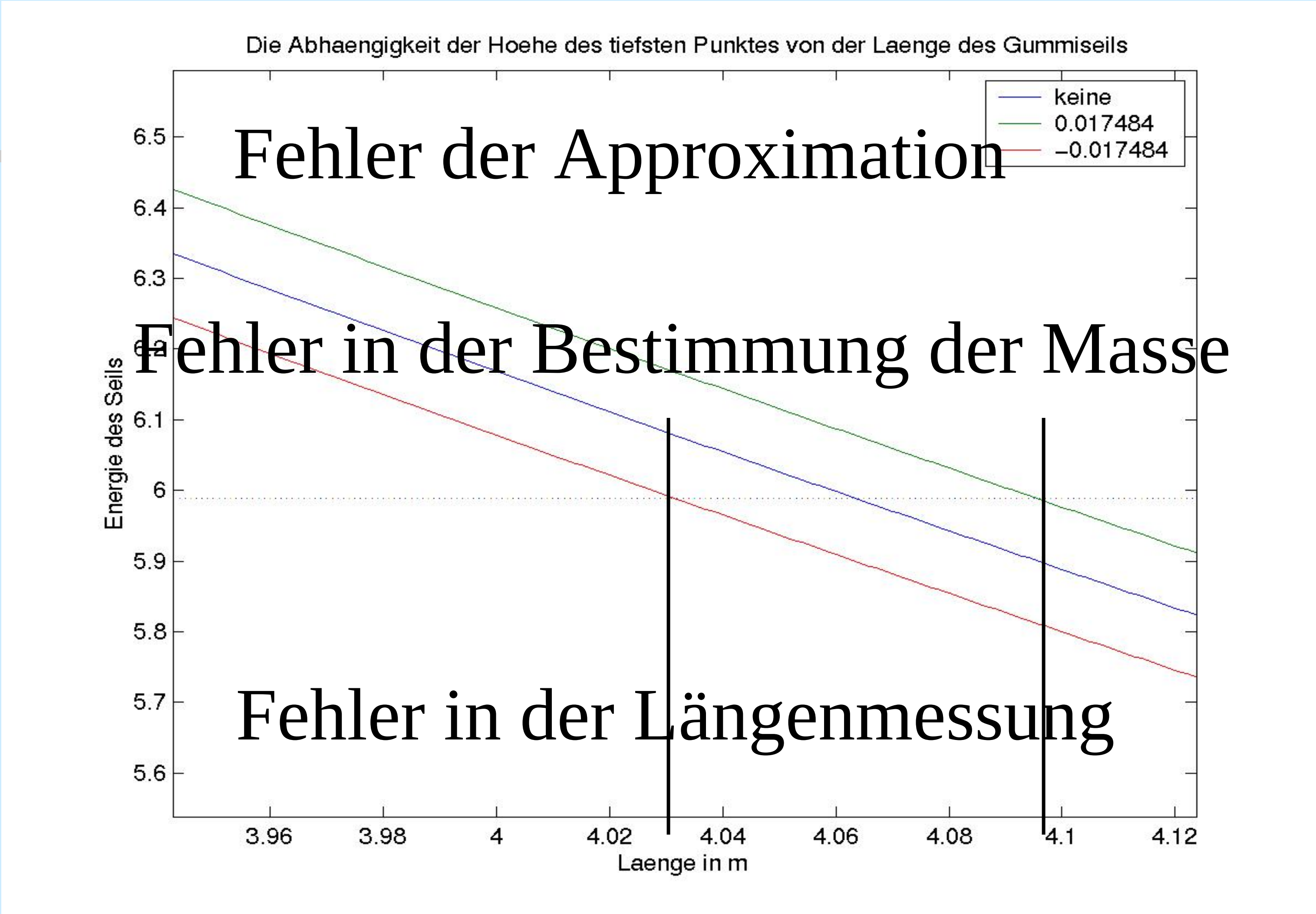
$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \left(\frac{m0}{6} + \frac{m1}{3} + \frac{m2}{3} + \frac{m3}{6} \right) + O(h^5)$$

Ortskurve

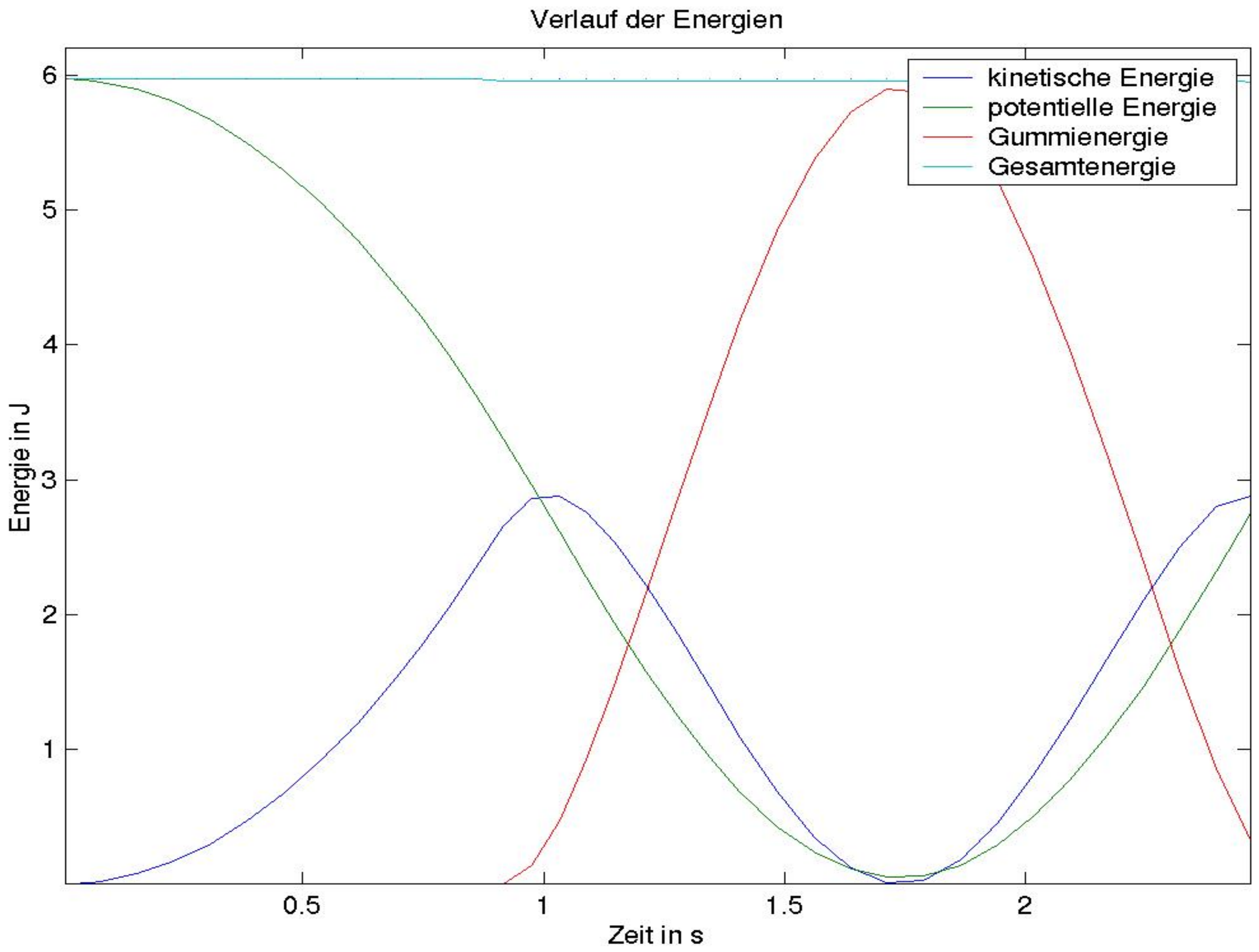


minima der ortskurven
minimum der ortskurve in m
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
4.02
4.04
4.06
4.08
4.1
4.12
4.14
4.16
gummilaenge l in m
ortskurve fuer die drei abweichungen, bei emp gummilaenge 4.07 m
−0.017484
keine
0.017484
ort in m
4
2
0
−2
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
2.1
2.2
2.3
zeit in s

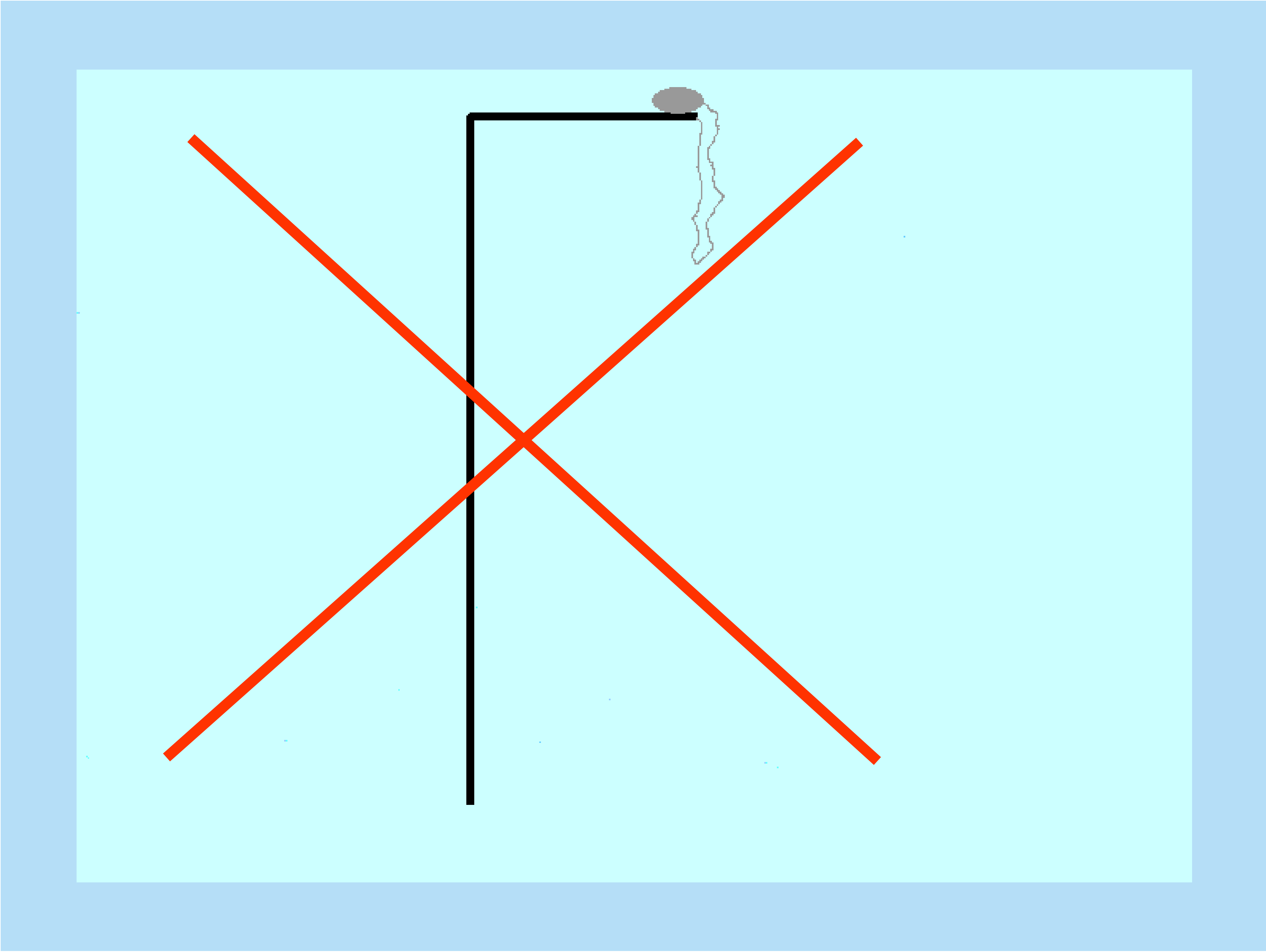
Fehlerabschätzung

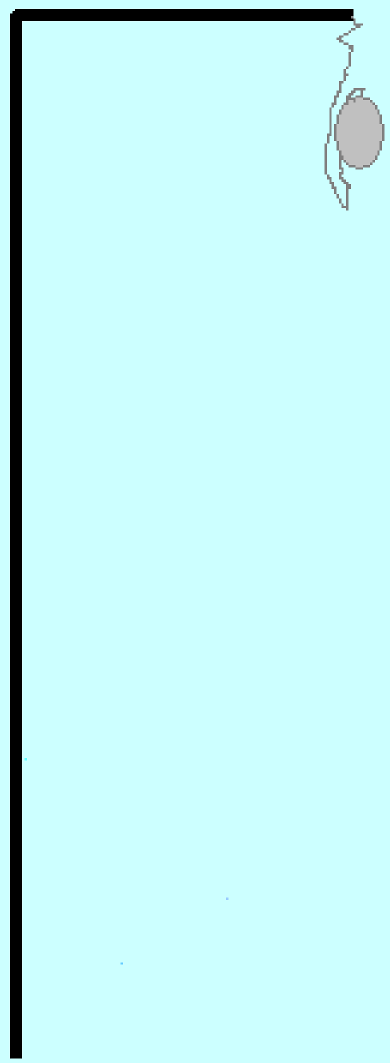


Überprüfung



Das Experiment





Fazit

Was haben wir gelernt ?

- Teamarbeit
- Analyse von Problemen und Aufstellen von Hypothesen
- Ausarbeiten von Lösungswegen
- Irrwege

Genauere Näherung war für uns in der gegebenen Zeit nicht möglich

Das

war‘s

!!!