

# Die Schwingende Atwood Maschine (SAM) - ein Vergleich von Theorie und Experiment

## Abstract

In diesem Projekt geht es um die Schwingende Atwood Maschine (SAM), die mit den Methoden der Hamilton-Mechanik untersucht wird. Außerdem wird die numerisch berechnete Dynamik mit dem Experiment verglichen.

## Einleitung und Motivation

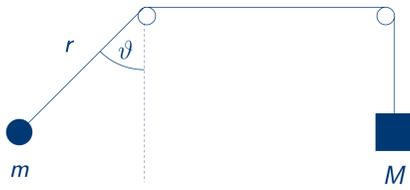


Abbildung 1: Skizze der SAM

Aus der Dynamik der SAM lässt sich viel über mathematische Methoden der klassischen Mechanik lernen. Wie bei der normalen Atwood Maschine sind auch bei der SAM zwei Massen über einen Faden verbunden. Um die SAM nun zu einer Schwingung anzuregen, wird die sogenannte *schwingende Masse*  $m$  um einen Winkel  $\vartheta$  ausgelenkt. Im Folgenden gehen wir zunächst von der *idealen* SAM aus, mit masselosen Umlenkrollen und punktförmigen Massen.

## Mathematische Herleitung

Wir wollen zunächst mit Hilfe des Hamilton-Formalismus die Bewegungsgleichungen der schwingenden Masse  $m$  herleiten (siehe auch [4]). Dazu stellen wir die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - Mgr + mgr \cos \vartheta \quad (1)$$

auf, um daraus die verallgemeinerten Impulse abzuleiten

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = (M+m)\dot{r} \quad \text{und} \quad p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}. \quad (2)$$

Die Hamilton-Funktion ist mit diesen Impulsen gegeben als

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2(M+m)} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + Mgr - mgr \cos \vartheta \quad (3)$$

Aus den kanonischen Gleichungen erhalten wir nun die gesuchten Bewegungsgleichungen

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{M+m} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\frac{p_\vartheta^2}{mr^3} - Mg + mg \cos \vartheta \quad (4a)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \quad \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = -mgr \sin \vartheta. \quad (4b)$$

## Gebundene Trajektorien

Für bestimmte Massenverhältnisse

$$\mu = M/m \quad (5)$$

sind sogenannte *gebundene Trajektorien* möglich. Dazu berechne man den Abstand  $r$  bei verschwindender kinetischer Energie  $T = 0$ . Aus der Energieerhaltung  $E = \text{const.}$  folgt dann

$$r(\vartheta, E) = \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\mu + 1} \cos \vartheta} \quad (6)$$

$1/\mu$  ist die Exzentrizität und die einhüllende Begrenzung hat die Form

$$0 < \mu < 1 \quad \text{Hyperbel} \quad \mu = 1 \quad \text{Parabel} \\ \mu > 1 \quad \text{Ellipse} \quad (\mu \rightarrow \infty \text{ Kreis})$$

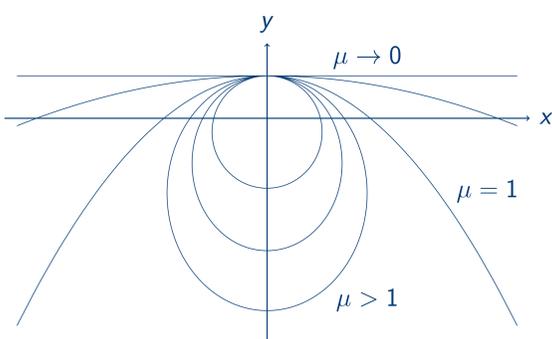
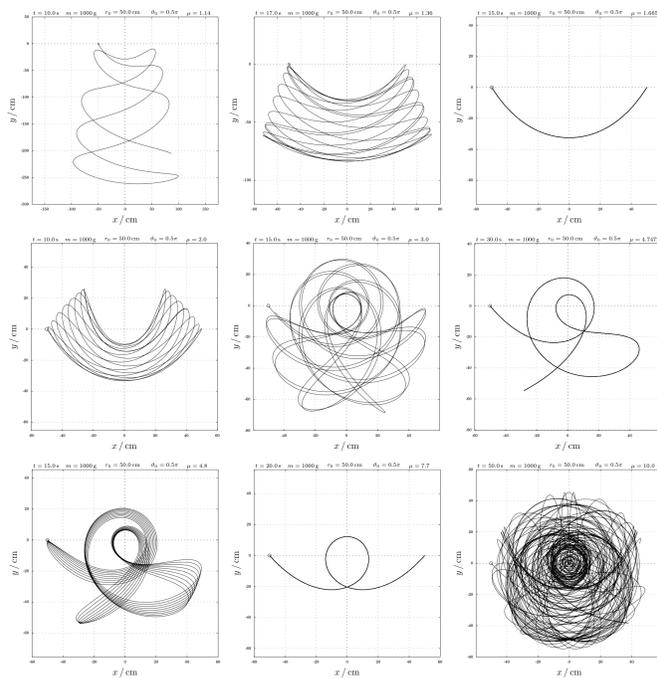


Abbildung 2: Begrenzende Äquipotentiallinien

## Trajektorien der idealen SAM



## Poincaré-Schnitte

Eine wichtige Frage ist, ob man die Lösung der hamiltonschen Bewegungsgleichungen exakt angeben kann. Eine analytische Überprüfung kann sehr schwierig sein, weshalb auf ein geometrisches Verfahren zurückgegriffen wird: Den Poincaré-Schnitt.

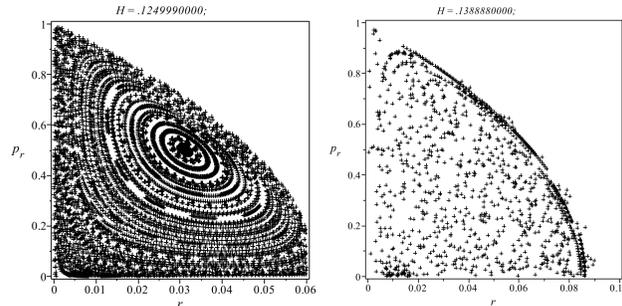
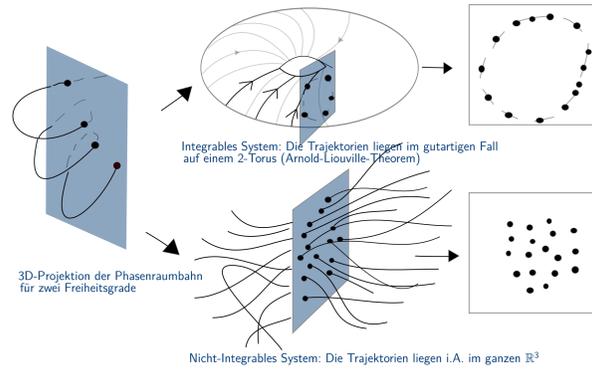


Abbildung 3: Links: Schnitt für  $\mu = 3$  (integrierbarer Fall), Schnittpunkte liegen auf Kurven; Rechts: Schnitt für  $\mu = 2,6$  (nicht-integrierbar)

## Korrekturen

Um einen sinnvollen Vergleich zum Experiment zu ziehen, müssen wir einige Korrekturen an den Bewegungsgleichungen vornehmen. Diese beachten nun nicht-masselose Umlenkrollen (Radius  $R = (1,70 \pm 0,05) \text{ cm}$ ) mit einem Trägheitsmoment von  $I = (4,9 \pm 1,5) \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  und die Luftreibung der Massen mit einem Luftwiderstandsbeiwert von  $c_w = 0,5$ . Dies liefert

$$\dot{r} = \frac{p_r}{M_t} + \frac{R(p_\vartheta + Rp_r)}{mr^2} \quad (7a)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta + Rp_r}{mr^2} \quad (7b)$$

$$\dot{p}_r = \frac{(p_\vartheta + Rp_r)^2}{mr^3} + g(m \cos \vartheta - M) + K_r \quad (7c)$$

$$\dot{p}_\vartheta = -grm \sin \vartheta - gRm \cos \vartheta + MgR + K_\vartheta \quad (7d)$$

mit der effektiven Masse

$$M_t = m + M + \frac{2I}{R^2} \quad (8)$$

und den Reibungskräften

$$K_r = -2c_w \left( \frac{p_r}{M_t} + \frac{R(p_\vartheta + Rp_r)}{mr^2} \right)^2 \quad (9a)$$

$$K_\vartheta = -c_w r^3 \left( \frac{p_\vartheta + Rp_r}{mr^2} \right)^2 \quad (9b)$$

## Experiment



## Vergleich zum Experiment

Zum Vergleich haben wir einige gerechnete Trajektorien (oben) den Gemessenen (unten) gegenübergestellt.

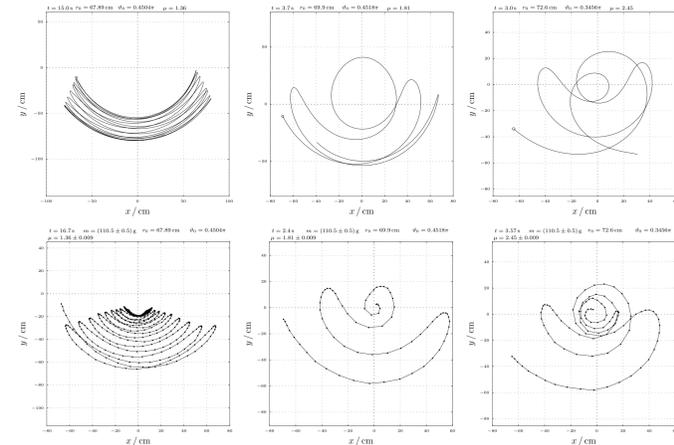


Abbildung 4: Vergleich von numerischen (oben) und experimentellen (unten) Trajektorien

Außerdem vergleichen wir die zeitliche Entwicklung der Koordinaten (Oben: numerisch, Unten: gemessen)

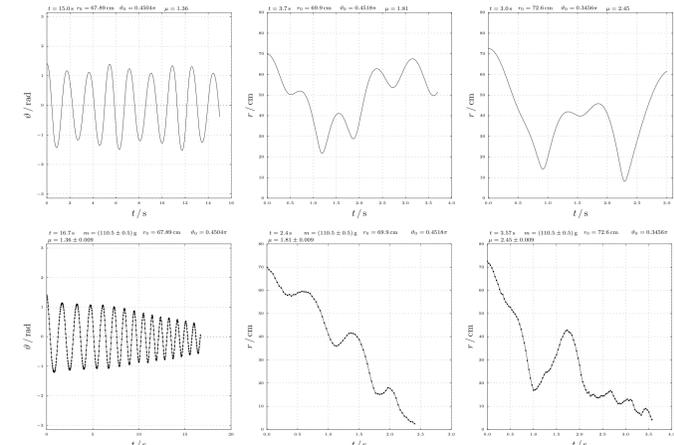


Abbildung 5: Vergleich von numerischen (oben) und experimentellen (unten) Zeitentwicklung von Radius  $r$  und Winkel  $\vartheta$

## Ergebnis

Wie sich gezeigt hat, ist die Dynamik der SAM überraschend vielseitig. Es lässt sich dabei einiges über die Anwendung der Hamilton-Mechanik auf klassische Systeme lernen, außerdem wie man solche numerisch betrachtet. Weitergehend konnte man anhand der SAM viel über Integrierbarkeit hamiltonscher Systeme verstehen. Das zugehörige Experiment liefert qualitativ ähnliche Trajektorien, auftretende Abweichungen von den theoretisch berechneten Bahnen lassen sich durch Dissipations-effekte erklären. Diese lassen sich jedoch nicht im Rahmen des klassischen Hamilton-Formalismus beachten.

## Weiteres

Hinter dem QR-Code ist eine Animation zur Form der Trajektorien zu finden, erstellt von Daniel Lu zu finden auf Youtube: <http://www.youtube.com/watch?v=oVsfmM9sacI>



## Referenzen:

- [1] L.D. Landau und E.M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. 14. Aufl. Bd. 1 Mechanik. Europa-Lehrmittel, Jan. 1997.
- [2] O. Pujol u. a. *Swinging Atwood's Machine: experimental and theoretical studies*. Elsevier, Dez. 2009.
- [3] Nicholas B. Tuffillaro. *Motions of a Swinging Atwood's Machine*. In: *J. Physique* 46 (Sep. 1985), S. 1495-1500.
- [4] Nicholas B. Tuffillaro, Tyler A. Abbot und David Griffiths. *Swinging Atwood's Machine*. In: *Am. J. Phys.* 52 (Okt. 1984), S. 895-903.

## Danksagungen:

Wir bedanken uns bei Herrn Nowak für seine Unterstützung beim Durchführen des Experiments und bei Herrn Thorsten Erlen für seine Bemühungen und Organisation.

## Kontakt:

marvin.ahrens@rub.de  
nils.conrad@rub.de  
alexander.ganz@rub.de  
bernhard.ihrig@rub.de  
bjoern.ladewig@rub.de