

Jannis Duvenbeck, Daniel Möller, Nikita Pelzer
 Betreuer: Jan Hildebrand

FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

Motivation:

Ziel dieses Projektes ist die möglichst realitätsgetreue Simulation von Münz- und Kugelbahnen im Münztrichter. Dieser wird oftmals dazu verwendet, die Gravitationswechselwirkung zwischen stellaren Objekten (insbesondere Planetenbahnen) zu veranschaulichen. Ob dieser Versuchsaufbau tatsächlich dafür geeignet ist, ist nur eine Frage, die in diesem Projekt beantwortet werden sollte.

Weiterhin wurde der Einfluss einzelner Parameter auf die Form der Trajektorie untersucht. Dazu lassen sich in der Simulation Größen wie Startgeschwindigkeit, Reibungskoeffizient und Startradius, aber auch das Potential (Trichterform) beliebig anpassen.

Zum experimentellen Vergleich wurden Bahnen an einem realen Münztrichter aufgenommen und mit den simulierten verglichen.

Theoretische Betrachtung:

Das endgültige Ergebnis ist eine numerische Lösung des das Problem beschreibenden Differentialgleichungssystems (DGLS), die mit Mathematica (Methode NDSolve) errechnet wurde.

Um Reibungskräfte und das Drehmoment leichter einbinden zu können, wurden zum Aufstellen des DGLS die **Lagrange-Gleichungen erster Art** verwendet (beides mit den Lagrange-Gleichungen zweiter Art hier nicht ohne Weiteres möglich²), hier in der Gestalt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \lambda \nabla G + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \quad G = 0$$

In diesem Fall lauten die Bewegungsgleichungen: $m\ddot{\vec{r}} = \lambda \nabla G + \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_D$

Dabei lassen sich die einzelnen Summanden schrittweise wie folgt betrachten:

- Zwangskraft $\lambda(t) \nabla G(\vec{r}, t)$

aus der Zwangsbedingung $z = d + pr^{1/f} \Leftrightarrow 0 = \sqrt{x^2 + y^2} - p^{-f}(z-d)^{f-1} =: G$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} G = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -p^{-f} f(z-d)^{f-2} \right)$$

- Gravitationskraft $\vec{F}_G = -m g \vec{e}_z$

- Rollreibungskraft (Luftreibung wird vernachlässigt) $\vec{F}_R = -\mu_R |\vec{F}_\perp| \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$

mit der Auflagekraft $\vec{F}_\perp = m \frac{(\ddot{\vec{r}} + g\vec{e}_z) \cdot \vec{\nabla} G}{|\vec{\nabla} G|^2} \vec{\nabla} G$

Damit erhält man für eine hypothetische Münze mit den Daten $m=50g$ (Münzmasse), $r_0=38cm$ (Startradius), $v_0=0,7m/s$ (Anfangsgeschwindigkeit, nur in y-Richtung) und dem im Experiment ermittelten Trichterpotential (siehe rechts) für verschiedene Reibungskoeffizienten die folgenden simulierten Trajektorien (Laufzeit $T=6s$). An den zugehörigen Energiediagrammen erkennt man die Dissipation.

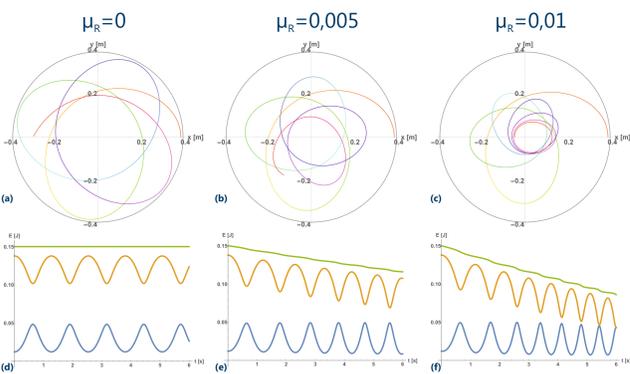


Fig. 1: a-c: Simulierte Münztrajektorien für $m=50g$, $r_0=38cm$, $v_0=0,7m/s$, $T=6s$ für verschiedene μ_r (siehe jeweilige Überschrift) mit eingezeichnetem Trichterrand; Farbverlauf kennzeichnet Zeitverlauf
 d-f: Zugehörige Energiediagramme: Gesamtenergie grün, potentielle Energie orange, kinetische Energie blau

- Nimmt man noch die Kraft \vec{F}_D unter der Bedingung $\vec{F}_D \cdot \vec{R} \stackrel{!}{=} 0$

resultierend aus dem Drehmoment $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_D \stackrel{!}{=} \theta m \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{R})$

(mit dem Trägheitsmoment $\theta = \frac{1}{2}$ für eine Münze und $\theta = \frac{2}{5}$ für eine Kugel

sowie $\vec{R} := R \frac{\vec{\nabla} G}{|\vec{\nabla} G|}$ (R Kugel- bzw. Münzradius))

hinzu, so ergibt sich (Daten wie oben, $\mu_r=0,01$):

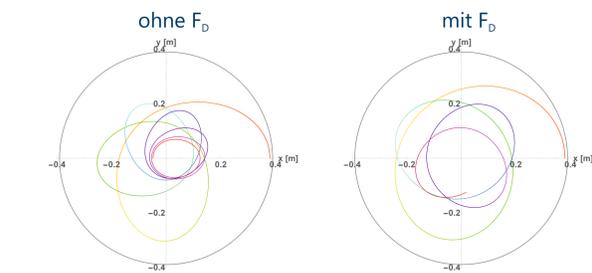


Fig. 2a: identisch mit Fig. 1c

Fig. 2b: Vergleich zu Fig. 1c unter Einbeziehung des Drehmoments

Man erkennt deutlich den Einfluss des Drehmomentes (Trägheit bzgl. Richtungsänderung) bzw. der größeren Gesamtenergie (durch Einbeziehung der Rotation).

An diesen Beispielen ist (wie auch in allen anderen Fällen einschließlich einem $1/r$ -Potential, außer für Kreisbahnen) zu erkennen, dass sich keine Ellipsen ergeben, insbesondere also **keine Kepler- bzw. Planetenbewegung** vorliegt.

Dass dies nie der Fall ist, wird schon in der reibungsfreien Betrachtung eines $1/r$ -Trichters mit den Lagrangegleichungen zweiter Art klar (vgl. [2]), die auf die Radialgleichung (in Zylinderkoordinaten)

$$\left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right) \ddot{r} - \frac{2k^2}{r^5} \dot{r}^2 + \frac{5gk}{7r^2} - \frac{25l^2}{49m^2 r^3} = 0$$

führt, welche aufgrund der Abhängigkeit von \dot{r} offensichtlich nicht dem Zweikörperproblem

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{l^2}{m^2 r^3} = 0$$

entspricht (bzw. für $\dot{r} \neq 0$ auch nie entsprechen kann).

Experiment:

Der experimentelle Nachweis erfolgte per Videoaufnahme von Trajektorien im Münztrichter der Fachdidaktik Physik.

Die **Auswertung** der Videos erfolgte mit der Software „Tracker“ durch bildweise Ortsbestimmung des betrachteten Objektes.

Nebenstehend beispielsweise die Aufnahme der Trajektorie eines Flummis.

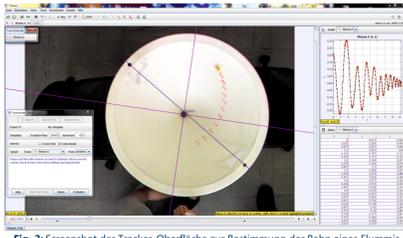


Fig. 3: Screenshot der Tracker-Oberfläche zur Bestimmung der Bahn eines Flummis

Um die so aufgenommenen Bahnen mit den simulierten vergleichen zu können, musste das verwendete Potential an die Trichterform angepasst werden. Dazu wurde zunächst für verschiedene Höhen der Trichterdurchmesser bzw. -radius bestimmt (Fit 1) und anhand dieser Daten eine Pappschablone (Vertikalquerschnitt) angefertigt, an die Trichteroberfläche angepasst und auf dem Papier ausgemessen (Fit 2). Die Fits an die so erhaltenen Messwerte ergaben für die Parameter p , d und f in der Zwangsbedingung (siehe „Theoretische Betrachtung“):

(Nachfolgend wird nur noch auf die Werte aus Fit 2 Bezug genommen.)

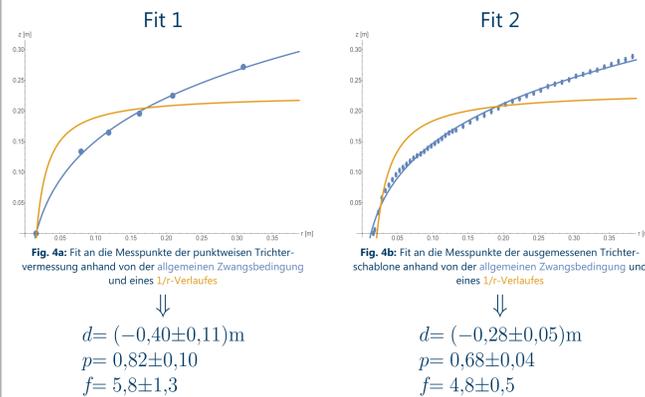


Fig. 4a: Fit an die Messpunkte der punktwweisen Trichter-
 vermessung anhand von der allgemeinen Zwangsbedingung
 und eines $1/r$ -Verlaufes

Fig. 4b: Fit an die Messpunkte der ausgemessenen Trichter-
 schablone anhand von der allgemeinen Zwangsbedingung
 und eines $1/r$ -Verlaufes

In den Plots ist außerdem die jeweilige Fit-Kurve für ein $1/r$ -Potential eingezeichnet (orange), was signifikant vom gemessenen abweicht. Diese Tatsache machte die Betrachtung von allgemeineren Trichterpotentialen erst nötig.

Ein weiteres Problem bei der Datenauswertung bestand in der Ungenauigkeit der Bildaufnahme durch nicht exakt senkrechte Aufsicht und laborhohenbedingte Weitwinkelverzerrung.

FAZIT und Interpretation

Zusammenfassend ist das Ergebnis der Simulation der Trajektorien mit Blick auf den direkten Vergleich durchaus als erfolgreich zu betrachten. Insbesondere scheint die numerische Lösung für die hier betrachteten Bedingungen ohne Fehler verlaufen zu sein, da keine physikalischen Widersprüche wie Verletzung der Energieerhaltung erkennbar sind (vgl. Fig. 1).

Zwar stimmen die simulierten Kugelbahnen bei realistischen Reibungskoeffizienten - optisch und die Anfangsgeschwindigkeiten betreffend - gut mit ihren gemessenen Pendanten überein. Jedoch ergeben sich vor allem bei den Münzbahnen auch sichtbare Abweichungen. Dies lässt sich zu einem großen Teil auf die wesentlich größere Anfälligkeit der Münzen für Störungen zurückführen, sowie auf stark variierende Reibungskoeffizienten bei leichtem Kippen bzw. Abrollen über die Kante. Zudem haben die verwendeten Euro- und Cent-Münzen ohnehin verschieden beschaffene und ausgeprägte „Riffelungen“ und ein entsprechendes (hier nicht betrachtetes) Schlupf- bzw. Rutschverhalten.

Der Vergleich mit Planetenbahnen stellte sich als nicht haltbar heraus.

Vergleich:

Folgend werden die für diesen Trichter und die jeweilige Kugel/Münze experimentell aufgenommenen (schwarz, links) mit den simulierten (blau, rechts) Bahnen verglichen.

Hinter den QR-Codes verbirgt sich je ein Youtube-Link, der eine simultane 3D-Animation der jeweils verglichenen Trajektorien im Trichter zeigt.

Experiment	Simulation
<p>Fig. 5a: Experimentelle Trajektorie für: $v_{0x} = (-0,15 \pm 0,08)m/s$; $v_{0y} = (0,88 \pm 0,08)m/s$</p>	<p>Fig. 5b: Simulierte Trajektorie für: $\mu_r = 0,019$ $v_{0x} = (-0,20 \pm 0,05)m/s$; $v_{0y} = (0,80 \pm 0,05)m/s$</p>
<p>Fig. 6a: Experimentelle Trajektorie für: $v_{0x} = (-0,35 \pm 0,08)m/s$; $v_{0y} = (0,63 \pm 0,08)m/s$</p>	<p>Fig. 6b: Simulierte Trajektorie für: $\mu_r = 0,06$ $v_{0x} = (-0,35 \pm 0,05)m/s$; $v_{0y} = (0,60 \pm 0,05)m/s$</p>
<p>Fig. 7a: Experimentelle Trajektorie für: $v_{0x} = (-0,38 \pm 0,08)m/s$; $v_{0y} = (0,65 \pm 0,08)m/s$</p>	<p>Fig. 7b: Simulierte Trajektorie für: $\mu_r = 0,03$ $v_{0x} = (-0,40 \pm 0,05)m/s$; $v_{0y} = (0,65 \pm 0,05)m/s$</p>
<p>Fig. 8a: Experimentelle Trajektorie für: $v_{0x} = (-0,08 \pm 0,08)m/s$; $v_{0y} = (1,23 \pm 0,08)m/s$</p>	<p>Fig. 8b: Simulierte Trajektorie für: $\mu_r = 0,012$ $v_{0x} = (0,00 \pm 0,05)m/s$; $v_{0y} = (1,20 \pm 0,05)m/s$</p>
<p>Fig. 9a: Experimentelle Trajektorie für: $v_{0x} = (-0,05 \pm 0,08)m/s$; $v_{0y} = (1,08 \pm 0,08)m/s$</p>	<p>Fig. 9b: Simulierte Trajektorie für: $\mu_r = 0,008$ $v_{0x} = (0,00 \pm 0,05)m/s$; $v_{0y} = (1,10 \pm 0,05)m/s$</p>
<p>Fig. 10a: Experimentelle Trajektorie für: $v_{0x} = (-0,08 \pm 0,08)m/s$; $v_{0y} = (1,20 \pm 0,08)m/s$</p>	<p>Fig. 10b: Simulierte Trajektorie für: $\mu_r = 0,004$ $v_{0x} = (0,00 \pm 0,05)m/s$; $v_{0y} = (1,20 \pm 0,05)m/s$</p>

Es ist in allen Fällen eine relativ große Ähnlichkeit festzustellen. Bei den Münzen (Fig. 5-7) fällt jedoch eine größere Unregelmäßigkeit auf als bei den Kugeln (Fig. 8-10). Insbesondere der erste bzw. zweite „Abknickpunkt“ stimmt in Experiment und Simulation für die Münzen nicht überein (ließ sich auch nicht über die Parameter anpassen).

Referenzen

[1] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 14. Aufl. Bd. 1 Mechanik. Europa-Lehrmittel, Jan. 1997.
 [2] L. Q. English und A. Marenco, *Trajectories of rolling marbles on various funnels*, American Journal of Physics 80, 996 (2012); doi: 10.1119/1.4747481
 [3] R. Schlickeiser, *Manuskript zur Vorlesung Theoretische Physik I: Mechanik*, 3. korrigierte Auflage

Danksagungen

- Thomas Schmidt für die Bereitstellung des Experimentes und die Unterstützung bei dessen Durchführung
- Arseniy Filin für seine Hilfe beim Umgang mit Mathematica
- Peter Conrad für seine Mitarbeit in der Projektgruppe
- Jan Hildebrand und weiteren beteiligten Personen für die Beschaffung eines Büros mit notwendiger Hard- und Software am Lehrstuhl für Theoretische Physik II

Kontakt

Jannis.Duvenbeck@rub.de
 Daniel.Moeller-x8g@rub.de
 Nikita.Pelzer@rub.de
 Jan.Hildebrand@rub.de