

Simulation von chaotischen Systemen: Das Doppelpendel

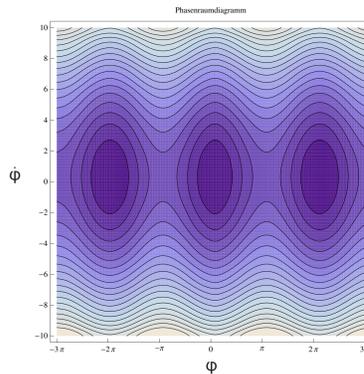
Chaostheorie

Chaostheorie ist ein Teilgebiet der Nichtlinearen Dynamik bzw. der dynamischen Systeme. Das Doppelpendel ist ein chaotisches System. Das heißt, es besitzt keine analytische Lösung es muss simuliert werden. Bei dynamischen Systemen, wie dem Doppelpendel erscheint die zeitliche Entwicklung unvorhersehbar, trotz zugrundeliegender deterministischer (bestimmter und eindeutiger) Gleichungen.

Ziel des Projekts

Ziel war die Programmierung einer Simulation eines Doppelpendels und einen Bezug zur Realität herzustellen (Wie lange stimmt die Simulation mit der Realität überein). Wir haben dazu Wolfram Mathematica 10 genutzt.

Einzelpendel



Es wurde damit begonnen, ein Einzelpendel zu simulieren. Links ist ein Phasenraumdiagramm mit Energieniveaus dargestellt. Beobachtet wurde, dass das Phasenraumdiagramm ein leicht zu einem Quadrat verformter Kreis ist, da keine Kleinwinkelnäherung genutzt wurde.



Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) = 0$$

Anfangsbedingungen:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad \varphi(0) = 90^\circ$$

$$l = 1 \text{ m} \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

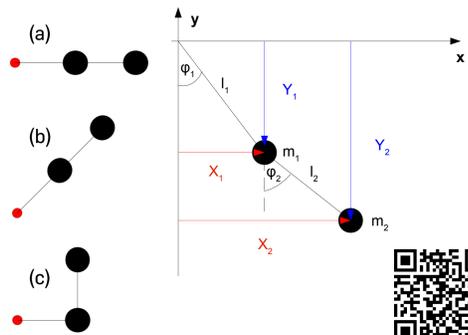
$$m = 1 \text{ kg}$$

Energie:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}(t)^2 + m g l (1 - \cos(\varphi(t)))$$

Versuchsbeschreibung

Folgende Anfangsbedingungen haben wir untersucht; jeweils war das System in Ruhe. Alle Graphen wurden zu (c) erstellt. Untersucht wurden die Energie (Abweichungen durch Numerik), Spezialfälle (große Stablängendifferenz und große Massendifferenz), verschiedene numerische Verfahren zur Lösung und die Dauer der Übereinstimmung mit/ohne Reibung.



Doppelpendel

Es ergibt sich mithilfe von Lagrange 2 folgende Differentialgleichung:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] - m_1 g [(l_1 + l_2) - l_1 \cos \varphi_1] + m_2 g [(l_1 + l_2) - (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2)]$$

Daraus folgen die beiden Bewegungsgleichungen:

$$(1) (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin \varphi_1 = 0$$

$$(2) l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 g \sin \varphi_2 = 0$$

Die Energie ergibt sich zu:

$$E = T + V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1(t)^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_2(t) + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2(t)^2 - g [(m_1 + m_2) l_1 \cos(\varphi_1(t)) + m_2 l_2 \cos(\varphi_2(t)) - m_1 l_1 - m_2 (l_1 + l_2)]$$

Anfangsbedingungen:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

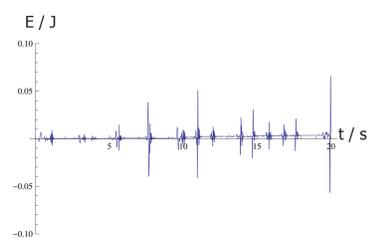
$$m_1 = 1 \text{ kg} \quad l_1 = 2 \text{ m}$$

$$m_2 = 1 \text{ kg} \quad l_2 = 2 \text{ m}$$

$$\varphi_1(0) = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0$$

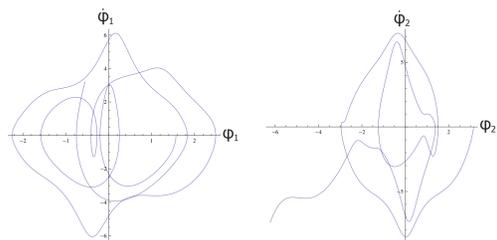
$$\varphi_2(0) = \pi \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Unten ist ein Energiediagramm der Simulation mit geringer Maschinengenauigkeit dargestellt, dort kann man einen numerischen Fehler bereits gut erkennen kann.



Phasenraumbetrachtung

Die beiden Phasenraumdiagramme stellen die ersten 10s des simulierten Doppelpendels dar. Man kann die chaotischen und nicht geschlossenen Trajektorien gut erkennen.



Doppelpendel mit Reibung

Da in der Realität schon nach teilweise weniger als einer Sekunde andere Ergebnisse auftreten, als im idealisierten reibungsfreien Fall, haben wir anschließend die Coulombsche Reibung der Kugellager ($\mu = 9 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}$) berücksichtigt und realistischere Längen ($l = 0,2 \text{ m}$) der Stäbe gewählt.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

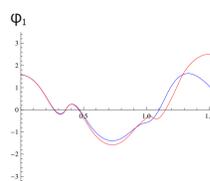
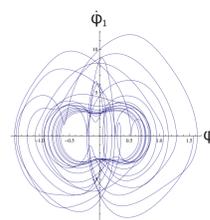
$$(1) (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin \varphi_1 = Q_1$$

$$(2) l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g \sin \varphi_2 = Q_2$$

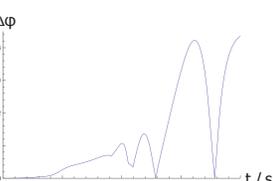
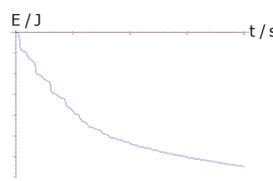


$$Q_1 = -\mu \dot{\varphi}_1$$

$$Q_2 = -\mu (-\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$$



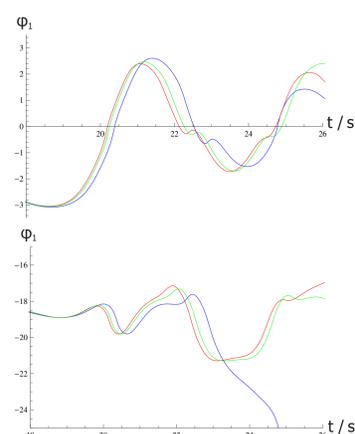
Im Phasenraumdiagramm links sind die kleiner werdenden Bahnen erkennbar. Im Energieplot rechts ist die abnehmende Energiekurve sichtbar. Unten links und mittig sind φ_1 und φ_2 mit (blau) und ohne (rot) Reibung dargestellt, man erkennt die Abweichungen nach schon 0,5s. Unten rechts ist die Differenz jeweils von φ_1 und φ_2 mit und ohne Reibung dargestellt.



Numerische Verfahren

Das für die Simulation des Doppelpendels geeignetste numerische Verfahren ist das klassische explizite Runge-Kutta (ERK) Verfahren. Dies hat sich im Vergleich mit anderen (klassischen/Standard) Verfahren bei gleicher Genauigkeit ergeben. Das ERK Verfahren ist ein Einschrittverfahren 4. Ordnung.

Ein besonderes Problem bei der Simulation ist die Maschinengenauigkeit (numerische Genauigkeit), welche schon nach kürzester Zeit (bei unserer verwendeter Genauigkeit von 10-40 Nachkommastellen wenige Sekunden bis hin zu maximal einer Minute) große numerische Fehler produziert.



Im Graphen links oben ist φ_1 , links unten φ_2 , bei der Verwendung von drei verschiedenen numerischen Verfahren dargestellt:

- Explizites Runge-Kutta
- Adams
- BDF

Dabei wurden folgende Einstellungen verwendet:
Working Precision: 20
Max Step Size: 0,1
Max Steps: 50.000



Auswertung

Das Verhalten des Doppelpendels war wie erwartet, die Extremfälle (große Massendifferenz, große Stablängendifferenz) zeigten die erwarteten Ergebnisse.

Numerische Fehler konnten erkannt werden und die Simulation mit Reibung zeigt schon nach wenigen Sekunden ein ganz anderes Bild als ohne Reibung, sodass das idealisierte Doppelpendel scheinbar nur als erste Näherung für ca. 0,5s genutzt werden kann.

Berücksichtigt man weiterhin Luftwiderstand und die Masse der Stangen, so ist ein nochmals anderes Bild zu erwarten, welches jedoch von der Simulation mit Reibung erst später abweichen sollte.