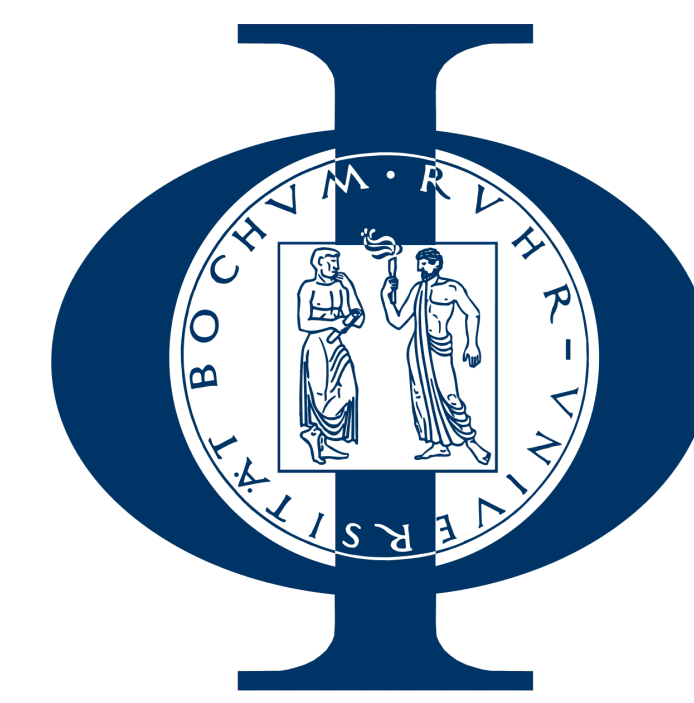


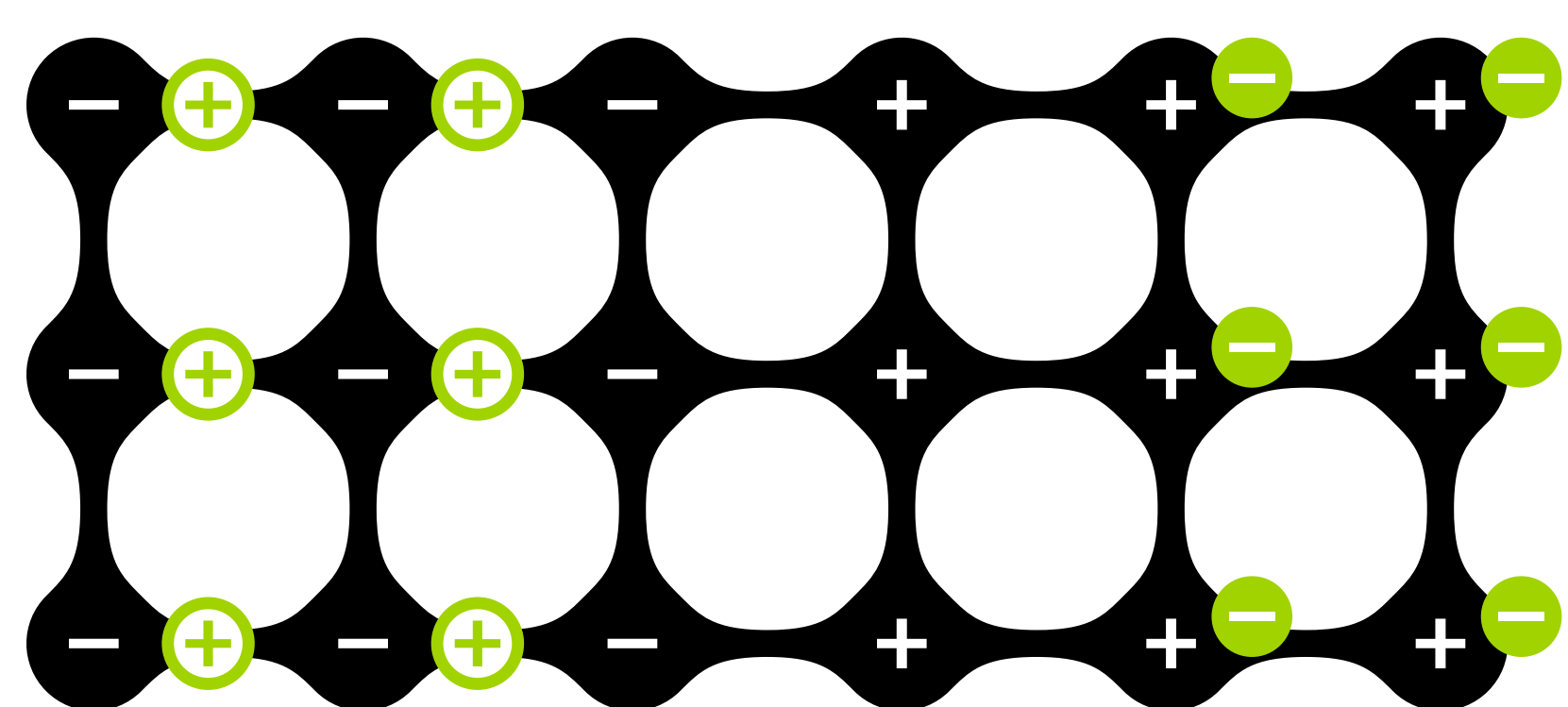
Toda-Oszillator



Leander Tetling, Simon Kreuznacht, Linh Han Thanh, Antonius Frie

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + U_s \left(\exp\left(\frac{Q}{U_s C_0}\right) - 1 \right) = A \sin(\omega t) \quad ①$$

Der Toda-Oszillator ist gekennzeichnet durch ein exponentielles Potential, was in unserem Versuch von einer Diode mit Schwellspannung U_s und Kapazität C_0 generiert wurde. Zusammen mit Widerstand und Spule bildet sie einen Serienschwingkreis, dessen chaotisches Verhalten wir in diesem Projekt untersucht haben.

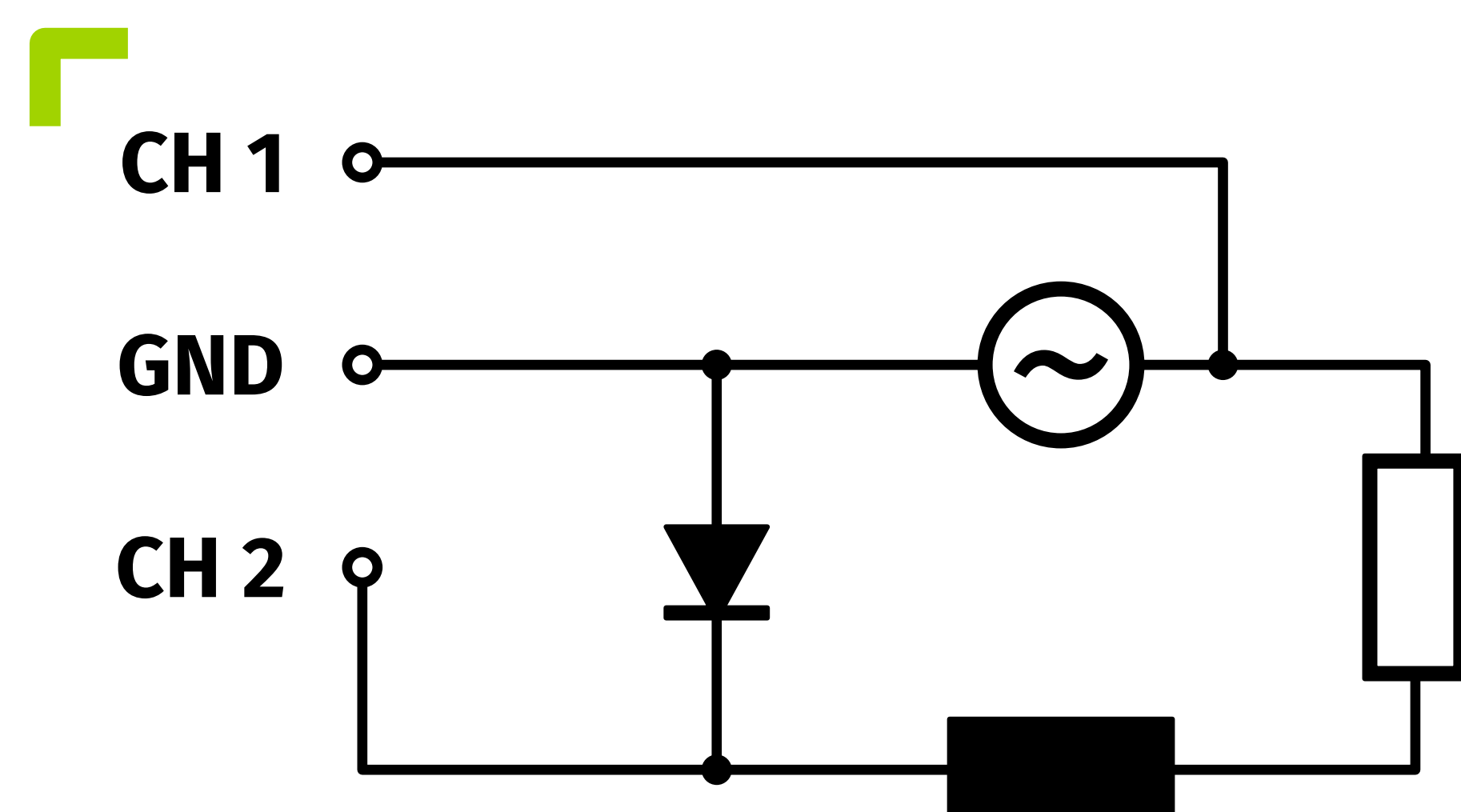


Diode als Kondensator

Am pn-Übergang einer Diode bildet sich eine Verarmungszone, die durch ihre geringere Ladungsträgerdichte (grün) nichtleitend ist, und deren Dicke durch ein externes Potential beeinflusst werden kann. Durch diese Sperrschicht verhält sich die Diode wie ein Kondensator mit spannungsabhängiger Kapazität.

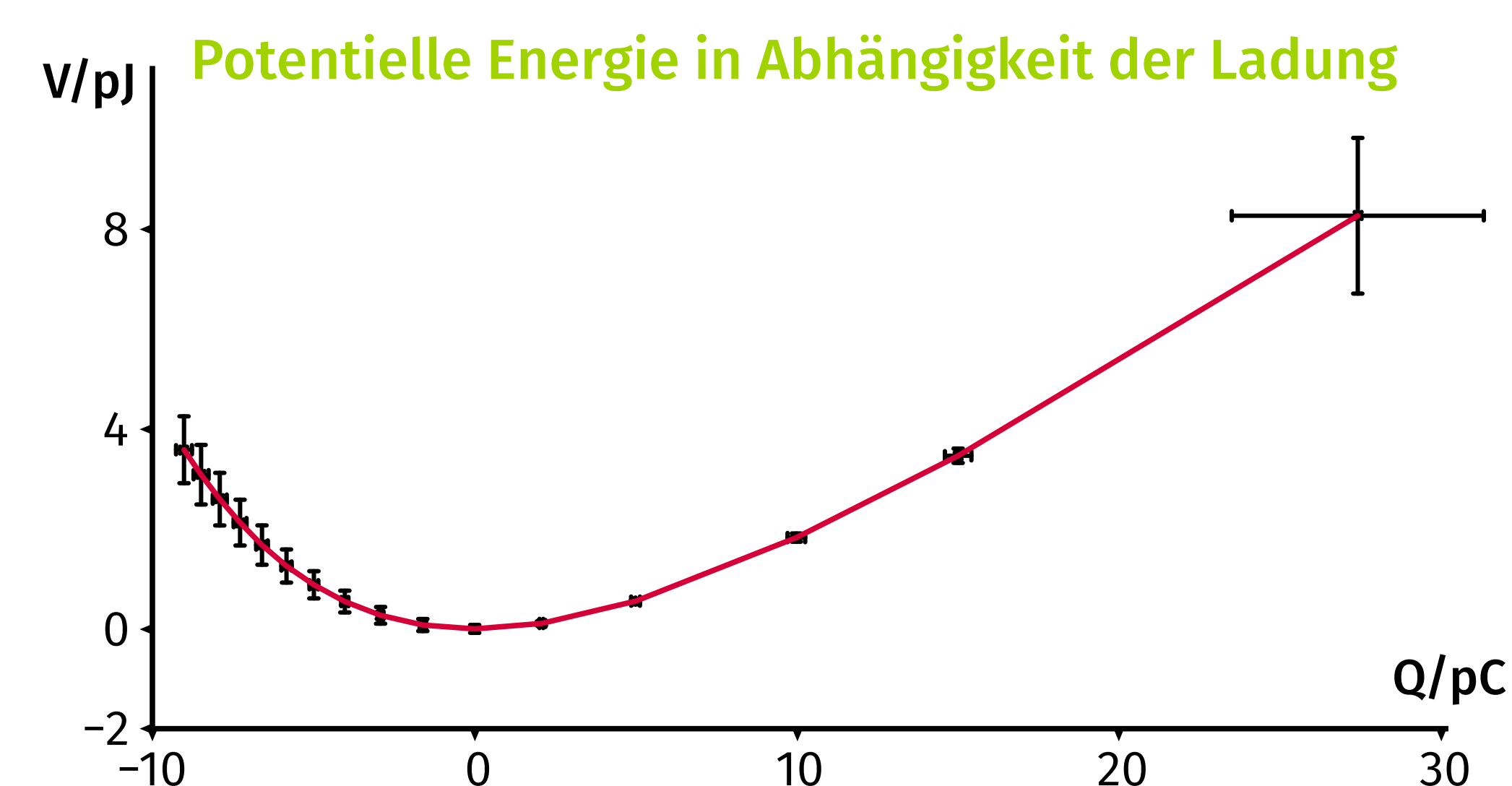
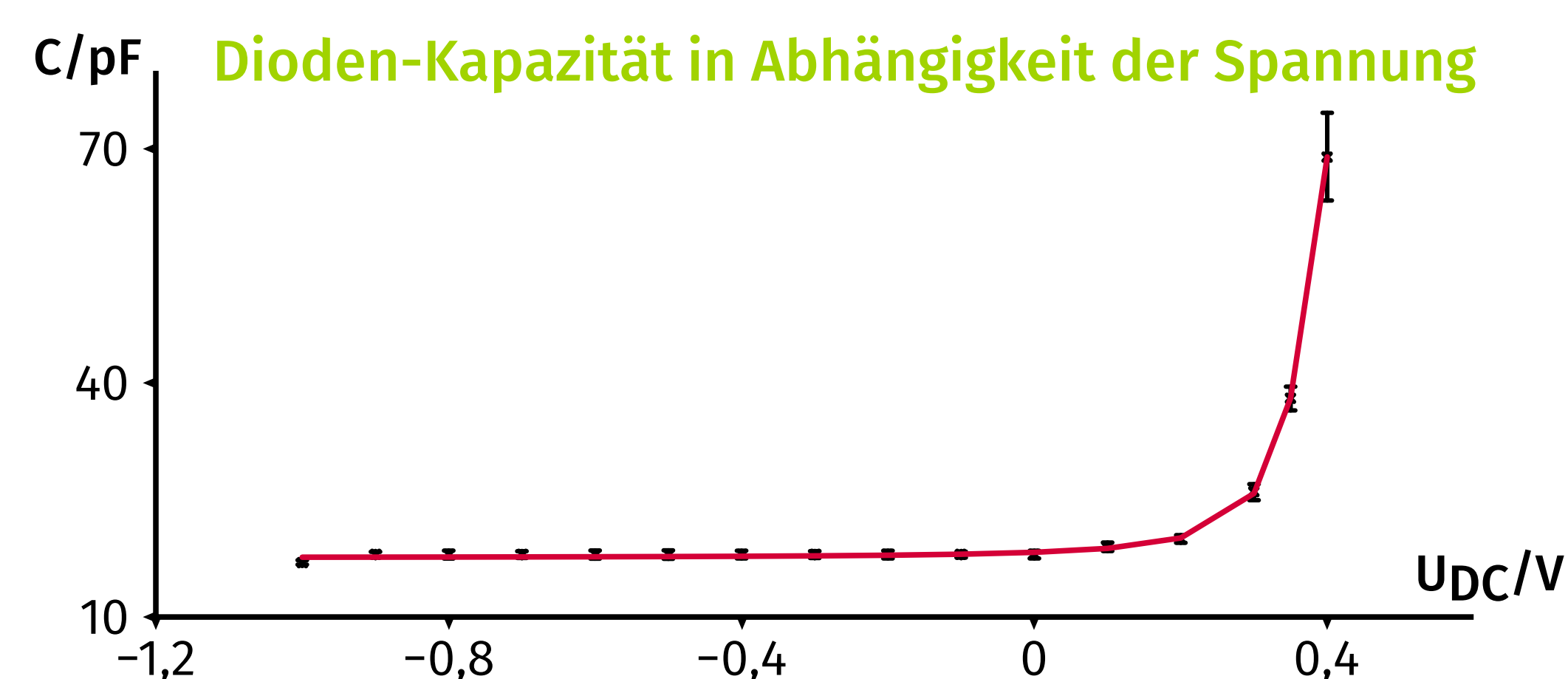
$$C(U) = \frac{dQ}{dU} = \frac{C_0 U_s}{U_s - U} \quad ② \quad Q = \int C dU = -C_0 U_s \ln(U_s - U) + Q_0 \quad ③$$

$$V(Q) = U_s^2 C_0 \left(\exp\left(-\frac{Q}{C_0 U_s}\right) + \frac{Q}{C_0 U_s} - 1 \right) \quad ④$$



Prinzipialschaltbild des Versuchsaufbaus

Der Versuchsaufbau entspricht dem eines üblichen Serienschwingkreises, in dem der Kondensator durch eine Diode ersetzt wurde. Die Schaltung wird vom Funktionsgenerator mit einer sinusförmigen Spannung angeregt. Das Oszilloskop trägt im XY-Modus die Anregungsspannung CH1 gegen die Spannungsantwort der Diode CH2, die ungefähr proportional zum Strom ist, auf. So wird die Phasenraumbahn des Systems sichtbar gemacht.



Phasenraumkurven

Messung

Bei einer festen Anregungsfrequenz $f=33\text{kHz}$ wurde die anliegende Wechselspannung im Bereich von 0V bis 10V(pp) variiert, um für ansteigende und absinkende Spannungen die Bifurkationspunkte aufzuzeichnen.

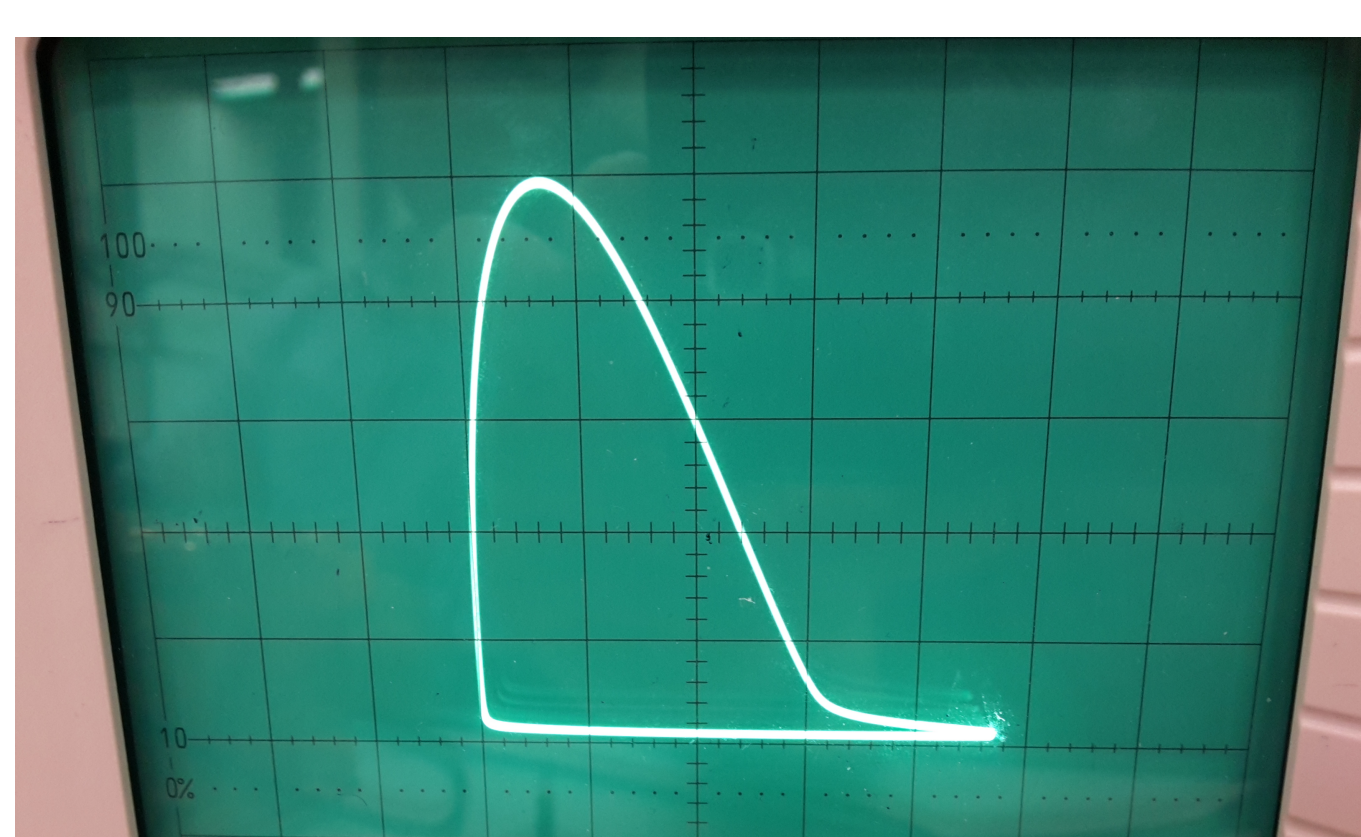
Chaosbegriffe

Eine qualitative Untersuchung des Systemzustandes lässt sich durch Betrachten der Trajektorie in dem von den Zustandsgrößen aufgespannten Phasenraum vornehmen. Ändert sich der Systemzustand qualitativ in Abhängigkeit eines Kontrollparameters (z.B. der Anregungsspannung), so spricht man von Bifurkation. Im Falle des Toda-Oszillators sind besonders die sog. Periodenverdopplungs- und die Tangentenbifurkation von Interesse. Erstere zeichnet sich durch Auftreten eines zweiten Attraktors (eine Teilmenge, der sich die Trajektorie im Verlauf ihrer Evolution annähert) im Phasenraum aus, bei letzterer wechseln sich drei stabile Fixpunkte und chaotisches Verhalten ab (Intermittenz). Ab unendlich vielen Periodenverdopplungen spricht man von Chaos (praktisch häufig ab Periode 16). Hat die Richtung, in der man einen Kontrollparameter variiert, einen Einfluss auf die Bifurkation, so spricht man von Hysterese.

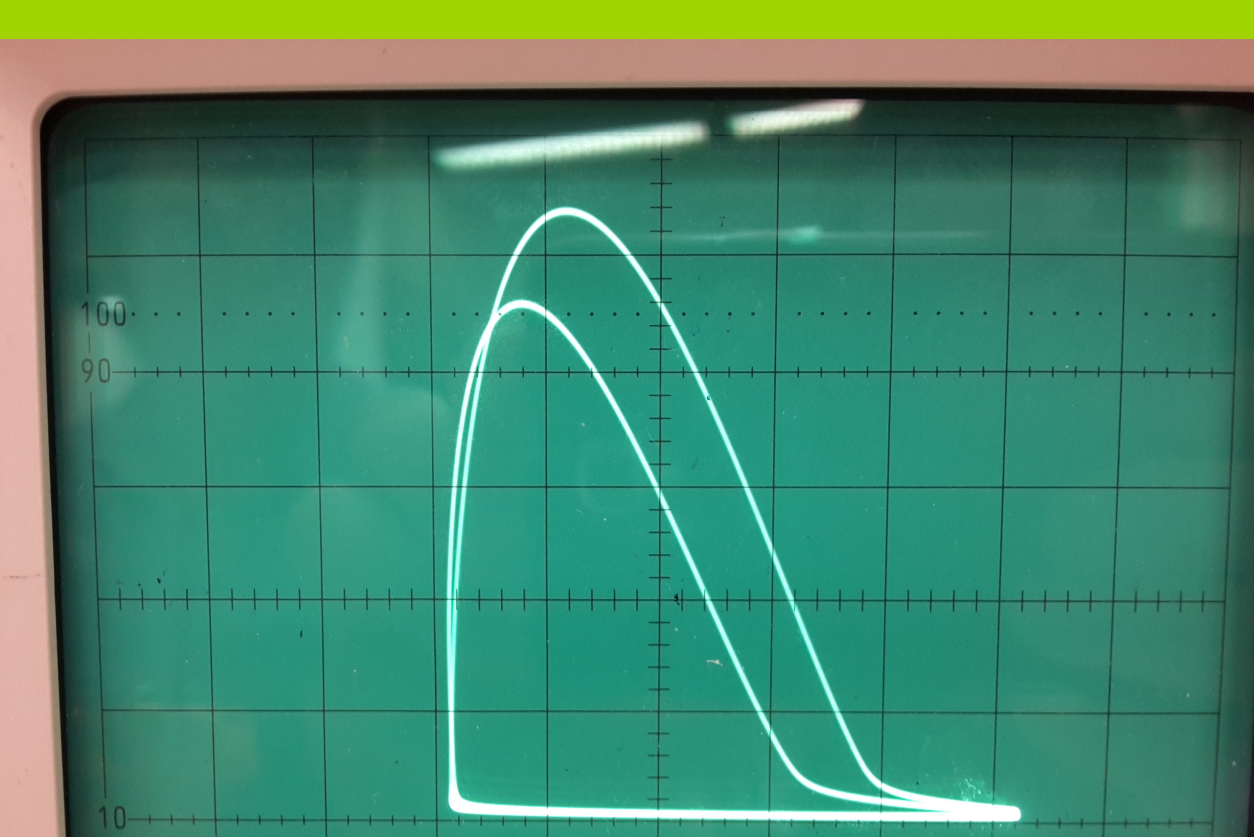
Vermessung der Dioden-Kapazität

Mit dem Funktionsgenerator wurde eine sinusförmige Wechselspannung $U_{AC}=40\text{mV(pp)}$ angelegt und diese mit verschiedenen Gleichspannungen U_{DC} im Bereich $-0,4\text{V}$ bis $1,0\text{V}$ überlagert. Die dazugehörigen Resonanzfrequenzen wurden bestimmt, indem die Anregungsfrequenz erhöht wurde, bis die Trajektorie auf dem Oszilloskop eine Gerade beschrieb. Daraus wurden dann in Abhängigkeit der Offset-Spannung Kapazität^⑤ und Ladung der Diode bestimmt.

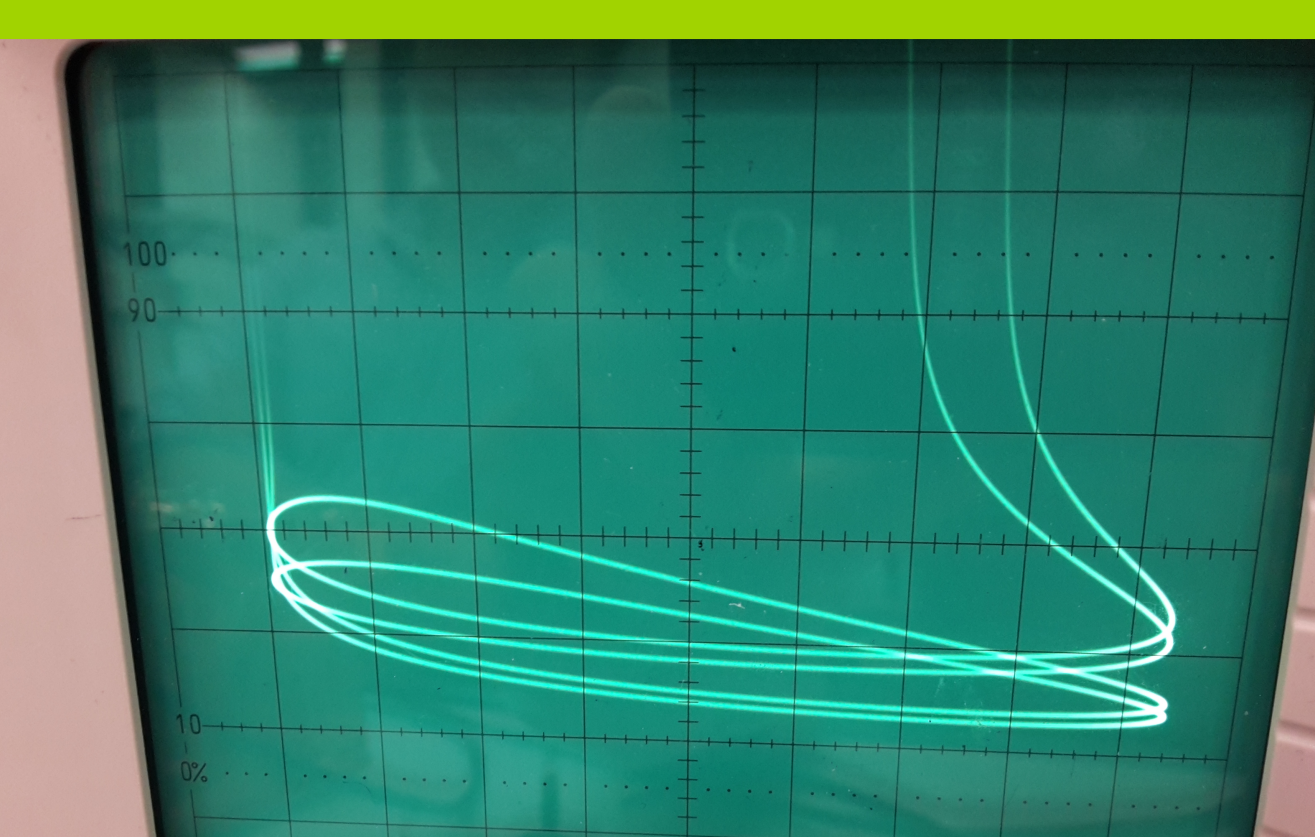
$$C = \frac{1}{4L\pi^2 f^2 + \frac{R^2}{4L^2}} \quad ⑤$$



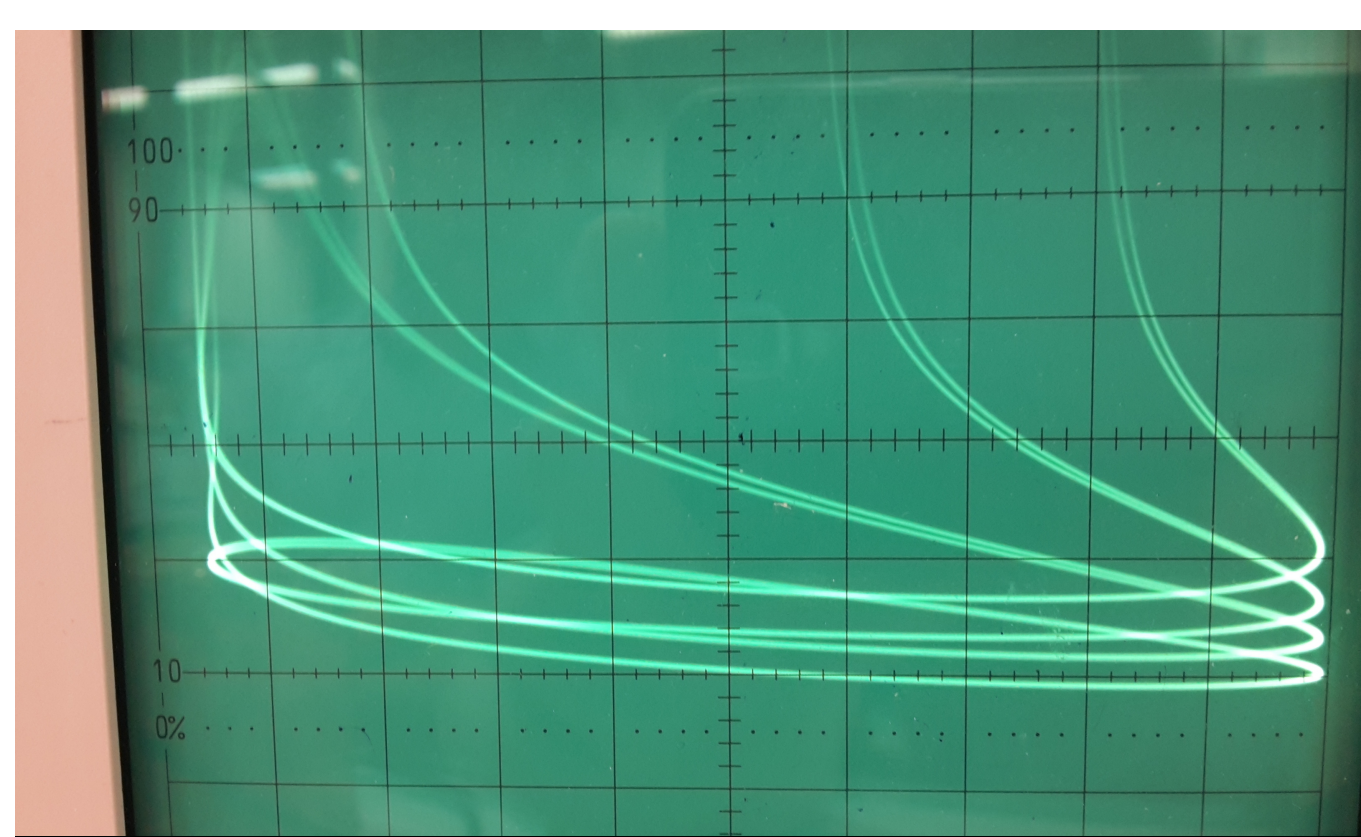
Periode 1



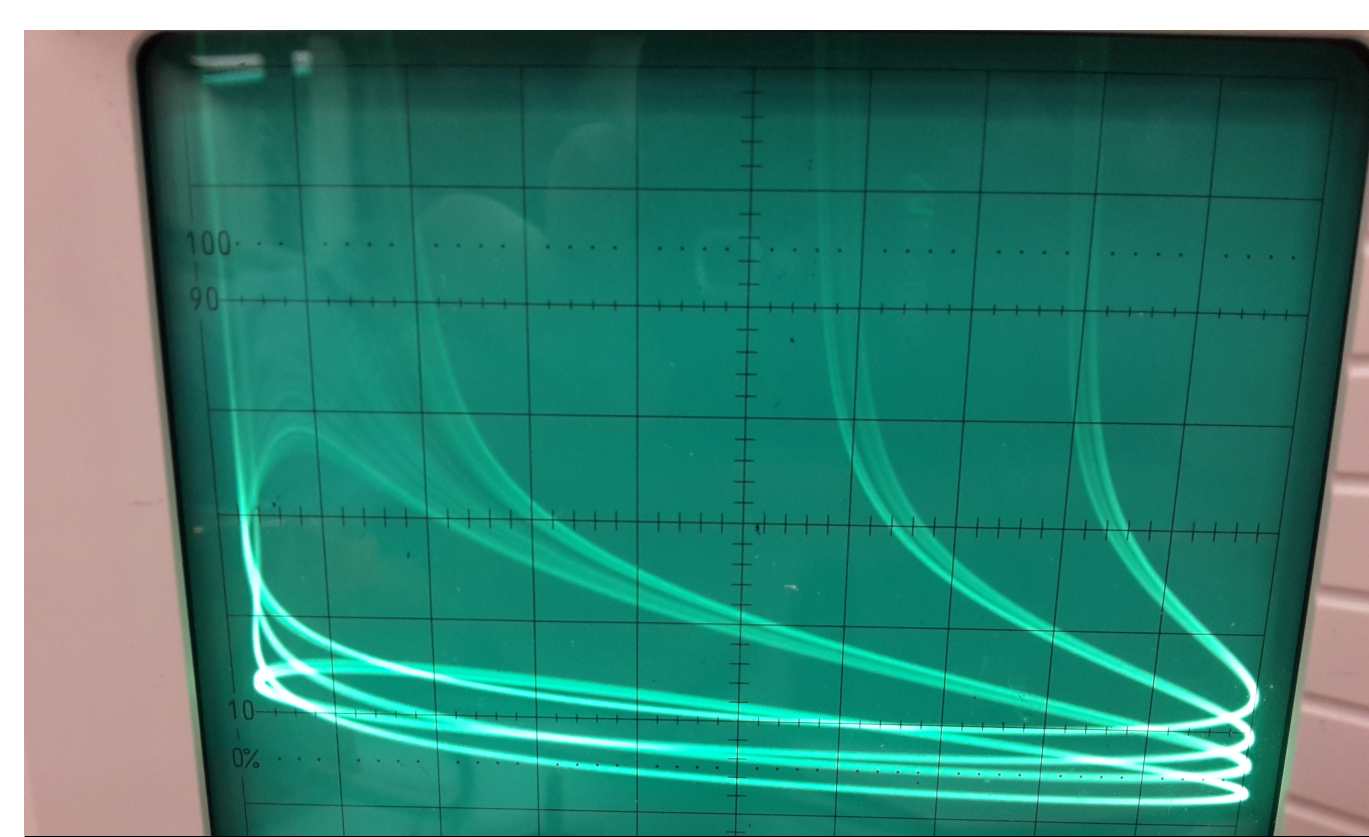
Periode 2 steigend 1270mV fallend 1170mV



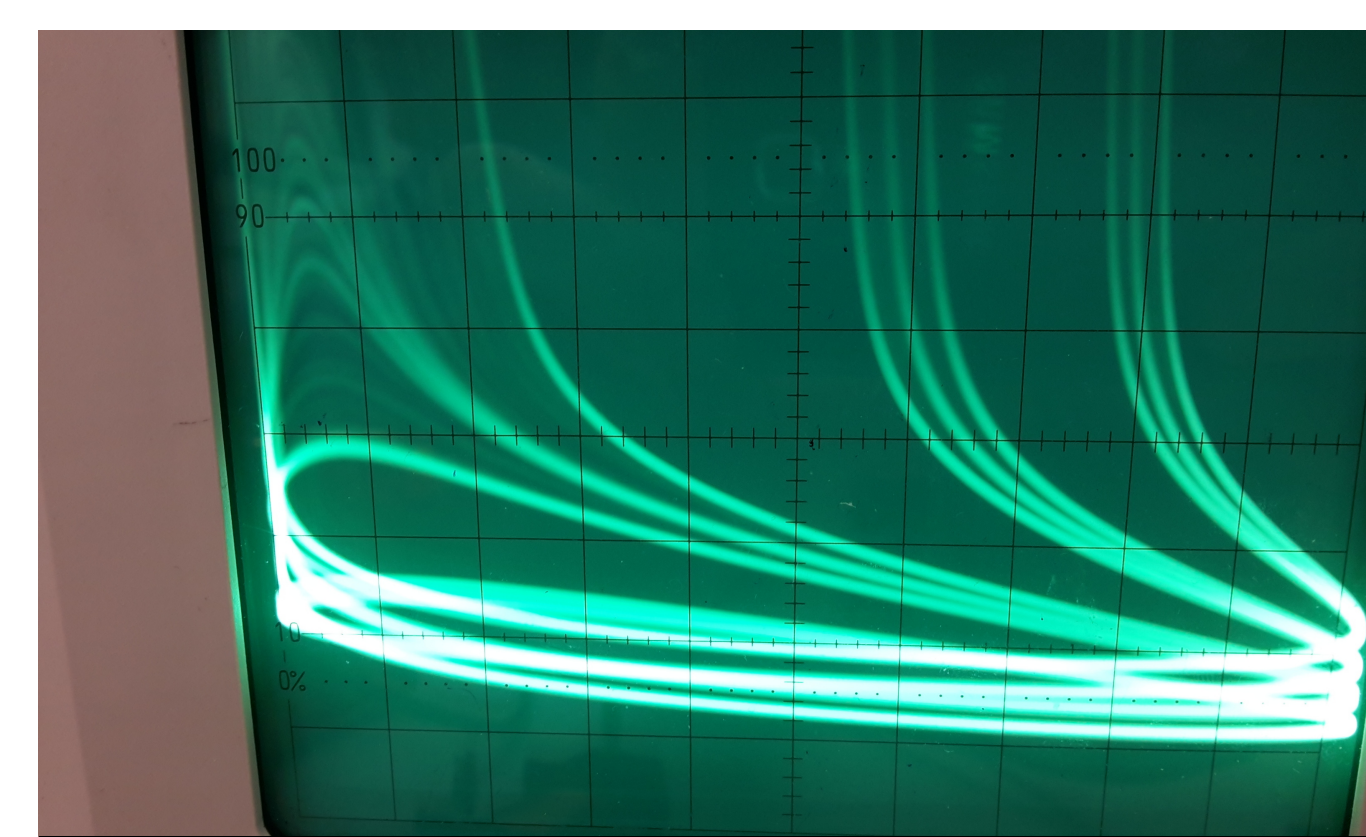
Periode 4 steigend 4130mV fallend 3820mV



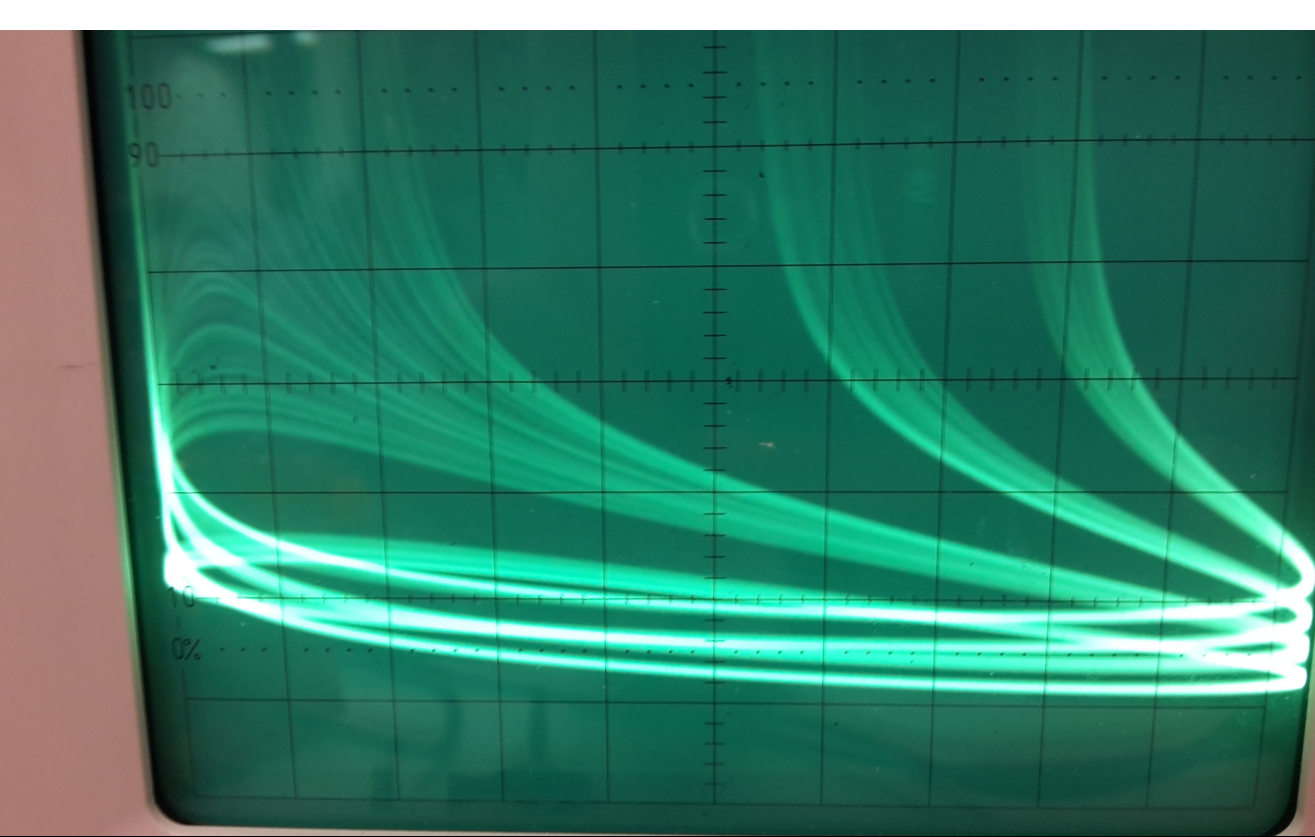
Periode 8 steigend 4680mV fallend 3980mV



Periode 16/Chaos 1 steigend 4850mV fallend 4470mV



Tangenten 12 steigend 5050mV fallend 4700mV



Chaos 2 steigend 5120mV fallend 4780mV

Fazit

Die Vermessung der Dioden-Kapazität und des Toda-Potentials lieferten zu vergleichbaren Experimenten sehr ähnliche Kurvenverläufe (vgl. ② und ⑤) und auch die Kapazität $C_0 = (18,5 \pm 0,5)\text{pF}$ liegt im Rahmen der in verschiedenen Datenblättern für Dioden des Typs 1N400X angegebenen Werte (8pF bis 30pF). Allerdings lassen sich keine rein theoretisch ermittelten Kurvenverläufe zum Vergleich heranziehen. Die Visualisierung der nichtlinearen Effekte und ein Nachweis von Hystereseffekten ist gut gelungen.

Literatur

- ① Jackson, Edwin Atlee: Perspectives of nonlinear dynamics, 1992
- ② Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 3, 4., überarb. Aufl. 2010
- ③ Kuypers, Friedhelm: Klassische Mechanik, 8., erw. Aufl. 2008
- ④ Thielke, Nils; Brauer, Robert: Toda-Oszillator, 2012
- ⑤ Herbst, Klaudia; Thomann, Manfred: Der Todaoszillator, 2004
- ⑥ Kittel, Charles: Einführung in die Festkörperphysik, 15., unveränd. Aufl. 2013

Dank

Projektleitung **Bo Zhang**
Technische Unterstützung **Tomasz Domanski**
Klaus Ulrich