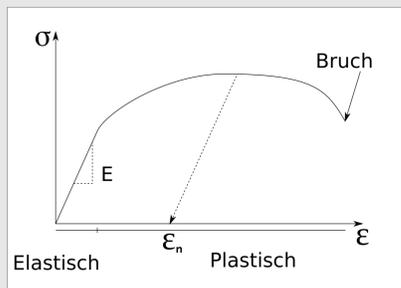


Ziele und Motivation

Zur Vorhersage des Verhaltens statischer Konstruktionen unter Last werden verschiedene theoretische Modelle herangezogen. Die materialabhängige Genauigkeit solcher Vereinfachungen wird am Beispiel des Fachwerks für den Baustoff Papier in zwei Dicken (100 g/m²; 160 g/m²) untersucht. Dazu müssen zuerst deren Schub- und Elastizitätsmodul ermittelt werden.

Grundlagen

Betrachte belasteten Werkstoff:

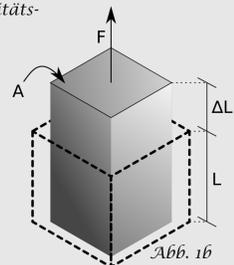


ϵ_r : Relative Längenänderung nach Belastung

E : Elastizitätsmodul

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



- Reaktion auf Belastung: Reversible (elastische) und irreversible (plastische) Verformung sowie Bruch (siehe Graphik)
- Flächenträgheitsmomente bei Papier vernachlässigbar, da im elastischen Bereich isotrop
- Elastische Verformung mit Hookeschem Gesetz für Elastizität:

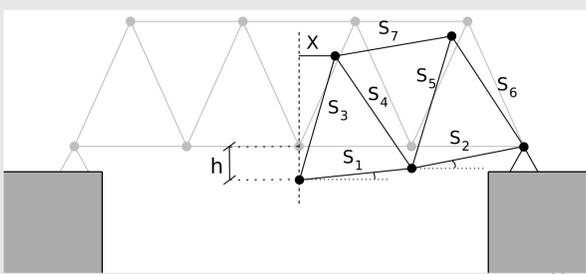
$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

- Analog: Hookesches Gesetz für Torsion: $\tau = G \cdot \gamma$

τ : Belastender Druck γ : Scherwinkel

G : Schubmodul

Fachwerke:



- Näherungen: Zweidimensional, Stäbe unbiegsam, Stablänge \gg Stabbreite
- Torsionsmodul \ll Elastizitätsmodul, daher ebenfalls vernachlässigt
- Kraftwirkung nur entlang der Stäbe; Belastung resultiert nur in Längenänderung
- Verlängerung einzelner Stäbe über Hookesches Gesetz für Elastizität berechnet
- Aus resultierenden Stablängen wird neue Geometrie theoretisch bestimmt (siehe Formel)

$$h = s_1 \sin(\arccos(\frac{x}{s_3}) - \arccos(\frac{(s_1^2 + s_3^2 - s_4^2)}{2 \cdot s_1 \cdot s_3})) + s_2 \cdot \sin(\arccos(\frac{1}{s_2} (l - s_1 \cdot \cos(\arccos(\frac{x}{s_3}) - \arccos(\frac{(s_1^2 + s_3^2 - s_4^2)}{2 \cdot s_1 \cdot s_3}))))))$$

l : Hälfte der Gesamtlänge der Brücke, andere Größen sind in Abb. 2 angegeben

Durchführung

Schubmodul (Abb. 3):

- Bessere Umsetzbarkeit durch drehbare Gewindestange
- Höhere Messgenauigkeit durch an Achse befestigtem Laser
- An der Stange befestigte Scheibe gegen an der Wand verbundene Scheibe durch Anhängen von Gewichten (+100g, max: 600g) verdrehen
- Ablesen des Verdrehungswinkels an Laserpunkt auf Skala an gegenüberliegender Wand

Elastizitätsmodul (Abb. 4):

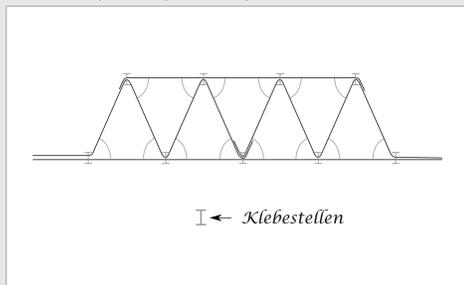
- Gleichmäßigere Papierstreifenlänge durch vertikales Tauschen der Blöcke
- Einspannen des Papierstreifens an Tischkante
- Justierung mit Auflegestab durch Peilung über dessen Enden
- Absinken der Streifenmitte bei Gewichtsanhang (+5g, max: 50g) mit Kathetometer ablesen

Fachwerk (Abb. 5):

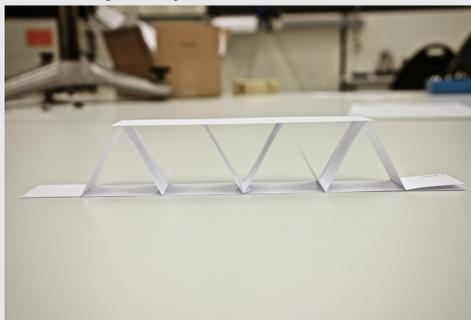
- Faltung der Papierstreifen mit Winkellehre 90°
- Klebstoff zur Minimierung aufgetupft
- Justierung und Messung wie bei Elastizitätsmodul
- Geplante Messungen weiterer Knotenpunkte durch fehlende horizontale Variabilität nicht möglich

Abb. 5:

Anordnung der Papierstreifen:



Realisierung aus Papier:



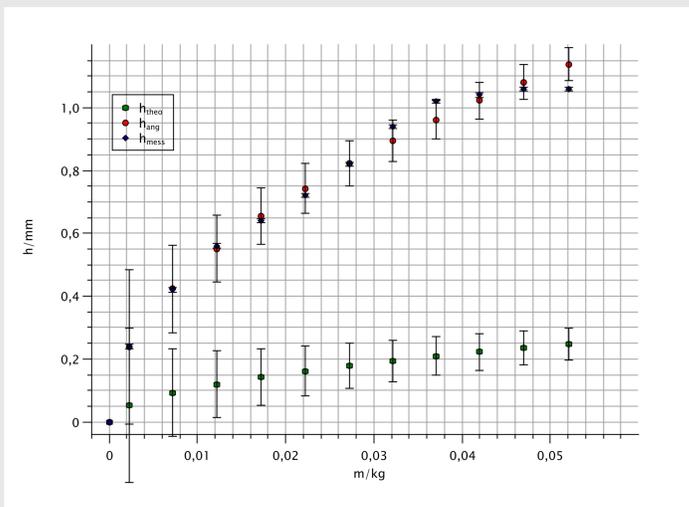
Auswertung

E-Modul:

- Beide E-Moduln deutlich höher als vermutet, geschätzt auf 1-6 kN/mm²
- Zum Vergleich: E-Modul von Holz bei ca 10 kN/mm².

Schubmodul:

- Beide Schubmoduln deutlich unter E-Moduln, Einfluss auf Fachwerke also vernachlässigbar



Belastung Fachwerk 160 g · m⁻²

Abb. 6

	Papier 100 g·m ⁻²	Papier 160 g·m ⁻²
E-Modul	(4,9 ± 10) · 10 ³ N·mm ⁻²	(1,12 ± 1) · 10 ⁴ N·mm ⁻²
Schub-Modul	(8,01 ± 8,11) · 10 ⁻¹⁴ N·mm ⁻²	(1,57 ± 1,44) · 10 ⁻¹³ N·mm ⁻²

m : Masse angehängter Gewichte
 h_{mess} : Gemessene Absenkung
 h_{theo} : Theoretische Absenkung
 h_{ang} : Linear angepasste theoretische Absenkung

Fachwerke:

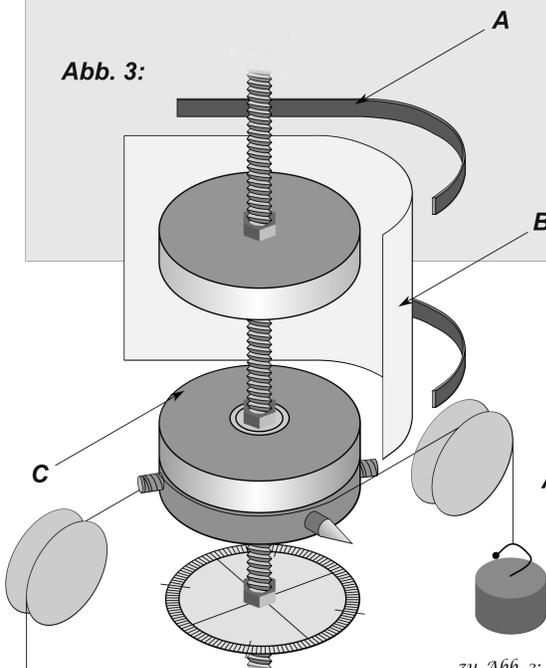
- Starke Abweichung zwischen theoretisch bestimmten und gemessenen Werten des Absinkens
- Für dickeres Material (160 g/m²) gut mit linearem Faktor ausgleichbar
- Für dünneres Papier (100 g/m²) durch niedrige Werte im unteren Drittel schlechtere Anpassung

Fehlerbetrachtung:

- Messung Schubmodul durch Genauigkeit des Lasers und Lagerung des Aufbaus von Vibrationen beeinflusst

- Gewichtsverteilung auf Papierstreifen nicht homogen parallel zur Einspannung, Streifen kippt (E-Modul und Fachwerk)
- Kleber wellt das Papier und sorgt für inhomogene Materialeigenschaften (Fachwerk)
- Kleine Auslenkungen aufgrund kurzer Papierstreifen erhöhen den relativen Messfehler (E-Modul und Fachwerk)

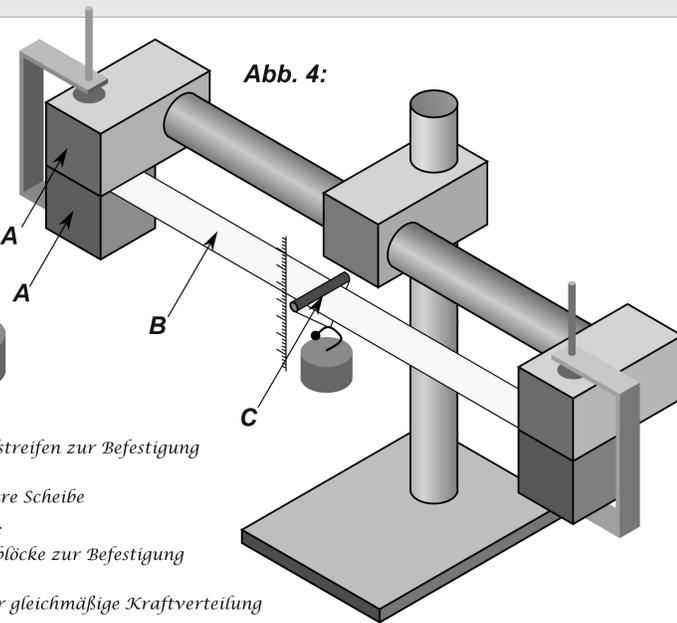
Abb. 3:



zu Abb. 3:
A: Metallstreifen zur Befestigung
B: Papier
C: Drehbare Scheibe

zu Abb. 4:
A: Spannblöcke zur Befestigung
B: Papier
C: Stab für gleichmäßige Kraftverteilung

Abb. 4:



Fazit

- Theoretisches Modell des Fachwerks ist durch linearen Faktor für Papier anpassbar, wobei es für dickeres Papier eine bessere Näherung liefert
- Genauere Ergebnisse durch Verwendung besserer Einspannvorrichtungen (z.B. ohne Holz), größerem Maßstabs und kleinerer Messschritte möglich
- Untersuchung des Modells für dickeres Papier, verschiedene Hölzer, sowie Metalle vielversprechend

Quellen

- Gross, Hauger, Schröder, Wall - Technische Mechanik 2
- Wolfgang Demtröder - Experimentalphysik 2
- Prof. A. von Keudell - Vorlesungsskript Physik I Mechanik und Wärmelehre