



# KELVIN-HELMHOLTZ-INSTABILITÄTEN

Günther Heemann, Maïke Kai, Steffen Schüttler, Stephan Sehring  
Projektbetreuer: Jan Kuhfeld

## Motivation

Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten (KHI) sind ein Phänomen, welches nicht nur im Labor, sondern auch in der Natur zu beobachten ist. Um diese Wirbel besser zu verstehen, sollen sie im SOWAS-Praktikum genauer hinsichtlich Auftreten und Ausbildung untersucht werden. Hierfür werden KHI an der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten in einem Behälter erzeugt und die Parameter der Wirbelgröße und Strömungsgeschwindigkeit mit Werten einer Simulation von KHI verglichen, sowie mit den erwarteten theoretischen Werten.

## Phänomenologie

- KHI beschreibt das Anwachsen einer kleinen Störung an der Grenzschicht zweier Fluide
- Störung wächst stetig an, solange sie nicht durch äußere Bedingungen beschränkt wird
- Wirbelausbreitung beschreibt sich äquivalent zur Druckänderung bei einem Tragflügel (Veranschaulichung durch Bernoulli-Gleichung)

## Theoretische Beschreibung

- Navier-Stokes-Gleichung [Gl. (1)] mit Inkompressibilitätsbedingung [Gl. (2)] wird angesetzt
- Diese beschreibt Geschwindigkeitsänderung an der Stelle  $\vec{r}$  als Folge der Konvektion, der Druckkraft  $-\nabla p$  und der Viskosität

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \right) = -\nabla p + \nu \cdot \Delta \vec{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$\rho$ : Massendichte der Flüssigkeit  
 $p$ : Druck  
 $\nu$ : Viskosität, konstant

- Trennung der Fluide durch prägnante Grenzschicht
  - An Grenzschicht auftretende Störung kann unter bestimmten Bedingungen zu KHI führen
- Über die Herleitung einer Dispersionsrelation<sup>[2]</sup> kann eine notwendige Bedingung [Gl. (3)] für die Ausbildung von KHI gefunden werden:

$$\rho \rho' (v' - v)^2 > \frac{g}{k} (\rho'^2 - \rho^2) \quad (3)$$

$\rho$ : Dichte von Fluid 1  
 $\rho'$ : Dichte von Fluid 2,  $\rho \leq \rho'$   
 $v$ : Geschwindigkeit von Fluid 1  
 $v'$ : Geschwindigkeit von Fluid 2  
 $g$ : Gravitationskonstante  
 $k$ : Wellenzahl

Abb. 1: Schematische Darstellung des Problems

## Simulation

- Ansatz über Navier-Stokes-Gleichung [Gl. (1)] für inkompressible Medien
- Betrachte Wirbeldichte:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$

Über die Einführung eines Geschwindigkeitspotentials kann die Gleichung umformuliert werden, sodass die Wirbeldichtenkomponente  $\omega$  beschrieben wird über die Relation:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \omega + \frac{\nu}{\rho} \Delta \omega \quad (4)$$

- Lösung der Ortsableitungen über Fourier-Transformation
- Gewöhnliche DGL der Zeit wird numerisch über ein Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung gelöst

## Experiment

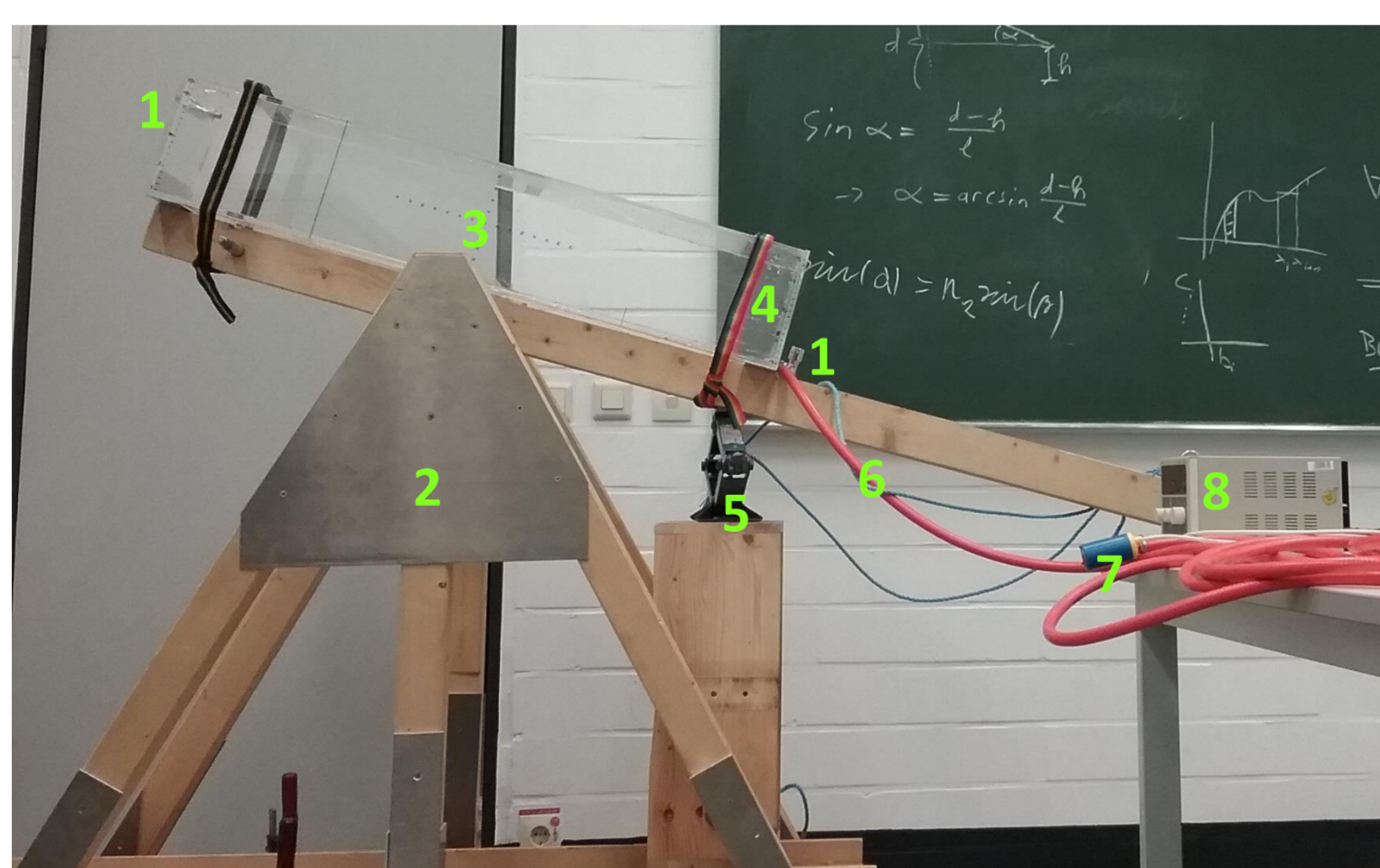


Abb. 2: Versuchsaufbau

### Legende

1. Ventile
2. Kippvorrichtung
3. Messskala
4. Vierkantrohr
5. Wagenheber
6. Befüllschlauch
7. Pumpe
8. Netzgerät

### Versuchsvorbereitung

- Rohr wird in Schiefelage gekippt (Vgl. Abb. 2) und Wasserpumpe an unteres Ventil angeschlossen
- Wagenheber unter Balken, um den Behälter in waagerechte Position aufzurichten
- Je 20 Liter destilliertes Wasser und gefärbtes Salzwasser werden von unten in das Rohr gepumpt
- Möglichst langsames Befüllen, um Bildung von Grenzschicht zu gewährleisten
- Langsames Aufrichten des Behälters in horizontale Position nach Befüllvorgang
- Vermischen der Flüssigkeiten ist zu vermeiden

### Versuchsdurchführung

- Schnelles Kippen der Vorrichtung unter bestimmten Winkel
  - Keine Wirbelbildung bei zu geringem Winkel aufgrund ungenügender Schergeschwindigkeit
  - Bei zu großem Winkel zu schnelle Vermischung der Flüssigkeiten
- Aufnahme des Kippvorgangs, Auswertung der Wirbel anhand des Bildmaterials

## Vergleich Experiment Simulation

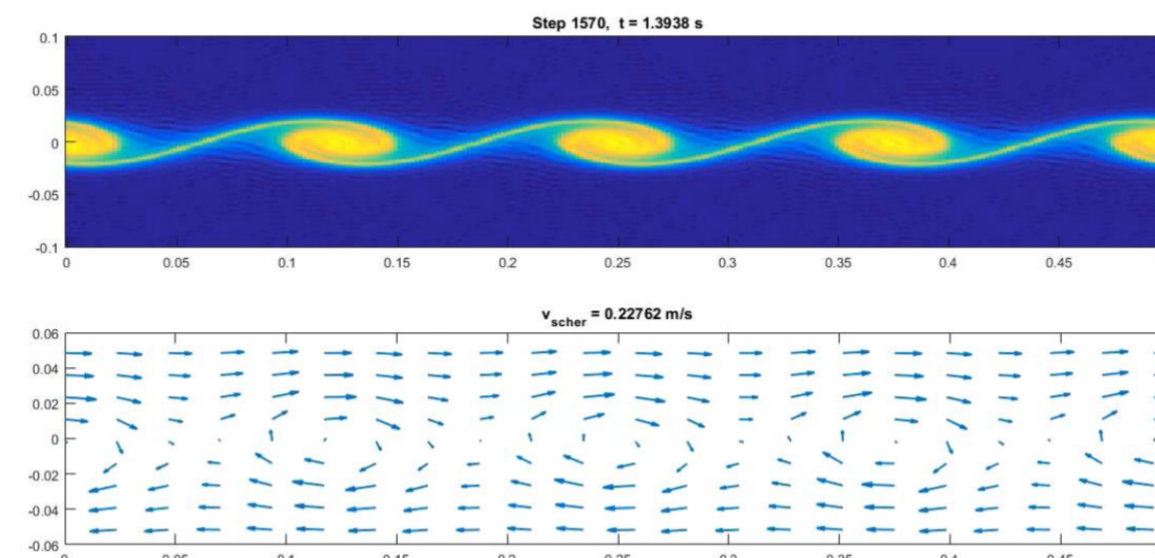


Abb. 3: Simulation mit Parametern von Versuch 06 zur Zeit der maximalen Wirbel im Experiment; oben: Wirbeldichte, unten: Geschwindigkeitsprofil

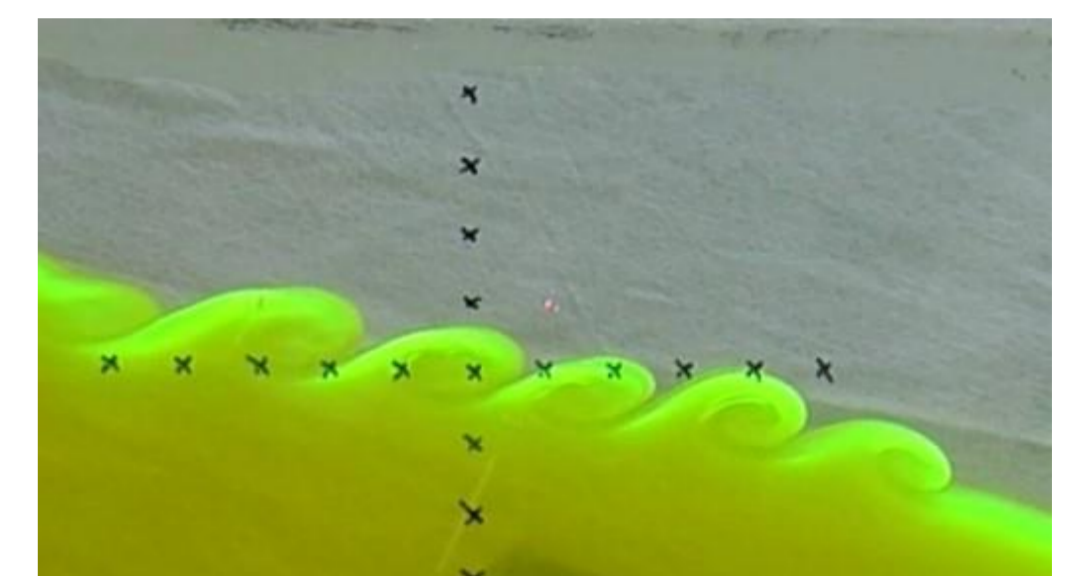


Abb. 4: maximale Wirbelbildung Versuch 06, Skala (Abstand Kreuze) beträgt 2cm

- Wirbel in der Simulation entsprechen optisch in etwa den Wirbeln aus dem Experiment
- Wirbelhöhen stimmen fast überein (Experiment: ca. 3,5cm; Simulation: ca. 4cm)
- Deutliche Unterschiede in der Wellenzahl (Experiment: 5 Wirbel auf 25cm; Simulation: 4 Wirbel auf 50cm)
- Wellenzahl abhängig von der Kanalbreite, welche aus der Störungsart folgt; Störungsart kann nicht aus Experiment ermittelt werden, somit kann Kanalbreite nicht exakt simuliert werden
- Simulation ist für identische Dichten programmiert, daher können nur geringe Dichteunterschiede zutreffend dargestellt werden

## Auswertung

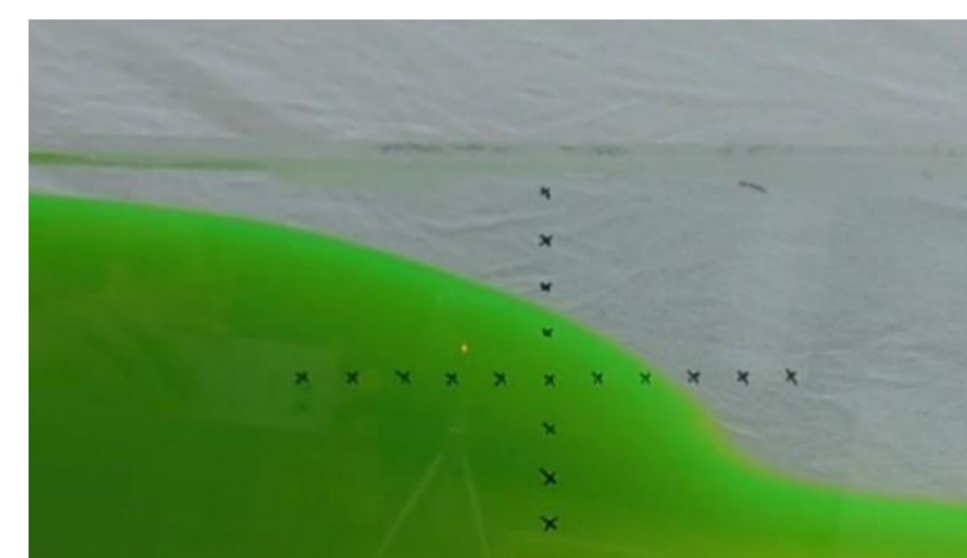


Abb. 5: fehlgeschlagene Wirbelbildung Versuch 04; Kreuzabstand beträgt 2cm

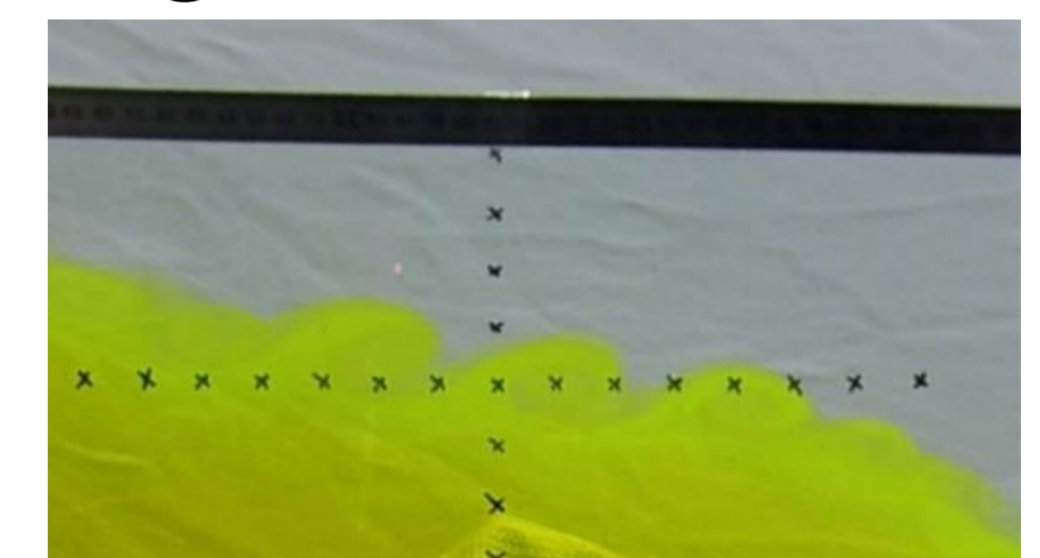


Abb. 6: maximale Wirbelbildung Versuch 07; Kreuzabstand beträgt 2cm

- Gl. (3) liefert Ausdruck, ab welcher minimalen Schergeschwindigkeit  $v_{theo}$  Wirbel auftreten
- Zur Bestimmung der experimentellen Geschwindigkeit  $v_{scher}$  wird die Volumenänderung  $\Delta V$  des Salzwassers zwischen rechtem und linken Abschnitt des Behälters vom Anfang des Kippens bis zur ersten sichtbaren Störung bestimmt
- Schergeschwindigkeit ist dabei die Geschwindigkeit mit der  $\Delta V$  durch das Rohr strömt
- Obige Betrachtung liefert durch Integration eine Gleichung für die Schergeschwindigkeit  $v_{scher}$

$$v_{scher} = 4 \cdot \frac{\Delta V}{t \cdot b \cdot h} \quad (5)$$

$t$ : Zeit bis zur Störung  
 $b, h$ : Tiefe und Höhe des Behälters

Tab. 1: Versuchsauswertung zum Geschwindigkeitsvergleich; rot hinterlegt: keine Wirbelbildung (Vgl. Abb. 5), grün hinterlegt: erfolgte Wirbelbildung (Vgl. Abb. 4 und Abb. 6)

Versuch	Winkel / °	$\rho' / \text{kgm}^{-3}$	$v_{scher} / \text{ms}^{-1}$	$v_{theo} / \text{ms}^{-1}$	$\delta v / \text{ms}^{-1}$
02	8,820 ± 0,009	1090 ± 55	0,16 ± 0,04	0,291 ± 0,008	0,13 ± 0,05
04	17,778 ± 0,009	1150 ± 58	0,29 ± 0,07	0,371 ± 0,010	0,08 ± 0,08
06	20,896 ± 0,009	1035 ± 52	0,18 ± 0,04	0,184 ± 0,005	0,00 ± 0,05
07	19,714 ± 0,009	1035 ± 52	0,18 ± 0,04	0,184 ± 0,005	0,00 ± 0,05
08	17,778 ± 0,009	1035 ± 52	0,15 ± 0,04	0,184 ± 0,005	0,03 ± 0,05

- $\delta v$  beschreibt Differenz zwischen theoretischer und experimenteller Schergeschwindigkeit
- Versuch 01 ist ein Probeversuch, Versuch 03 und 05 nicht auswertbar wegen ungenügender Grenzschicht

## Interpretation und Fazit

- Das Fehlschlagen der Versuche 02 und 04 kann über die ungenügende Schergeschwindigkeit erläutert werden (Vgl. Tab. 1), welche durch die hohe Dichte und zu geringe Ausbildungszeit im Behälter bedingt wird.
- Bei Versuchen mit erfolgreicher Wirbelbildung ist  $v_{scher}$  in der Nähe von  $v_{theo}$ ; Demnach scheint Gl. (3) hier eine gute Beschreibung des Problems zu liefern.
- Salzwasserdichte hat großen Einfluss, erkennbar an nicht erfolgter Wirbelbildung bei Versuch 04 mit hoher Dichte im Gegensatz zu gelungener bei Versuch 08 mit geringerer Dichte (Vgl. Tab 1).
- Kippgeschwindigkeit und Kippwinkel variieren von in jeder Durchführung und haben Einfluss auf die Wirbelbildung. Die Einflüsse können durch die geringe Anzahl an Versuchen nicht bestimmt werden; hierzu müsste der Versuch zur Ableitung der Abhängigkeiten bspw. mehrmals mit gleichem Kippwinkel und gleicher Dichte bei verschiedenen Kippgeschwindigkeiten durchgeführt werden.
- Verwendung von größerem Behälter zur Verbesserung der Messergebnisse; hier stehen mehr Zeit und Raum zur Ausbildung der Wirbel zur Verfügung und Randeffekte werden minimiert.

### Danksagung

... an die Techniker Herrn T. Domanski und Herrn K. Ulrich  
Ein besonderer Dank geht an Herrn Dr. J. Dreher für seine tatkräftige Unterstützung im Verlauf des gesamten Projektes und für die Hilfestellung bei der Simulation.

Über den QR-Code kommen Sie zu unserem Youtube-Kanal mit allen Videos des Experimentes.

