

Magnetisches Pendel

Untersuchung des deterministischen Chaos

Maximilian Flohr, Marvin Reuner, Tabea Röthemeyer, Peter Zajac

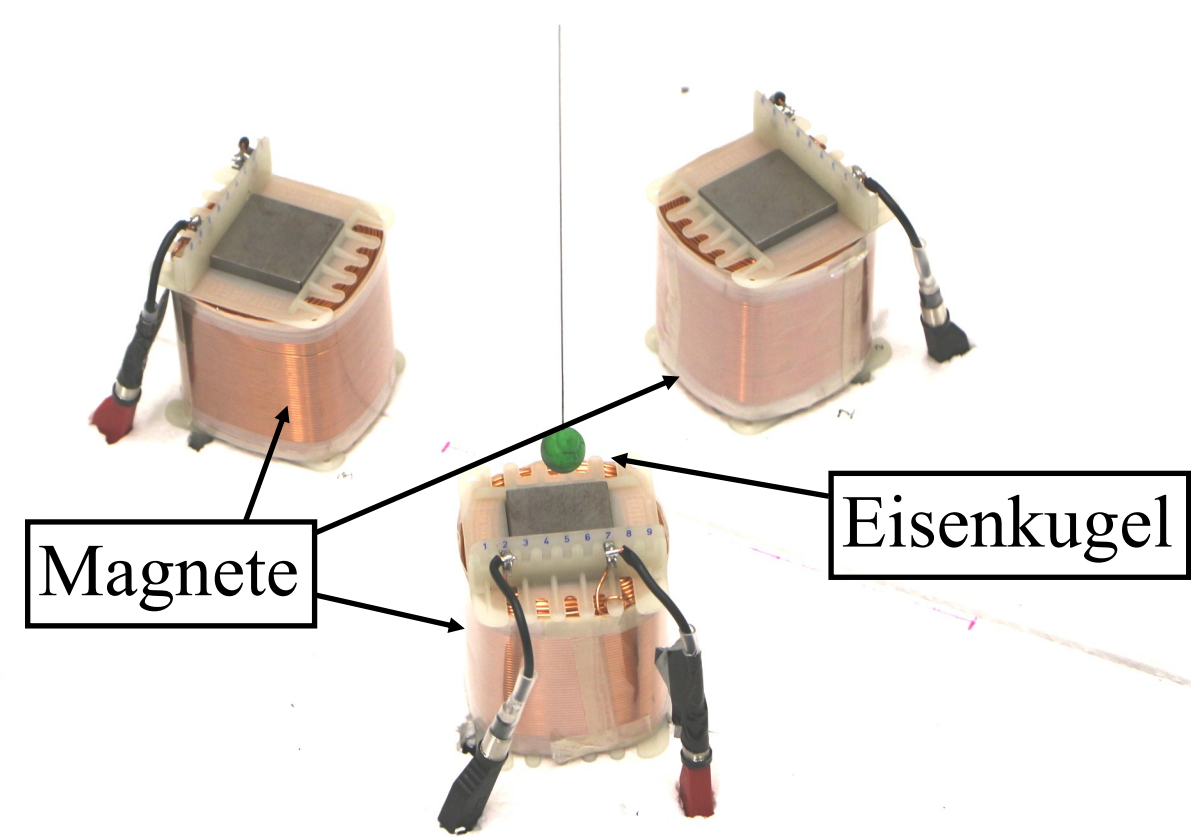


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau des Magnetpendels

Motivation und Grundlagen

Chaotische Systeme sind stark von ihren Anfangsbedingungen abhängig, weshalb sich diese vor allem für lange Zeiträume nur schwer reproduzieren lassen. Beispiele aus unserer Umwelt sind das Wetter oder das Fallenlassen eines Papierblattes. Dieses Verhalten soll experimentell und theoretisch am Beispiel des Magnetpendels untersucht werden. Ziel des Versuchs ist es, eine Aussage über die Vorhersagbarkeit des Endzustandes zu treffen, wenn die Startbedingungen und alle wirkenden Kräfte näherungsweise bekannt sind. Stimmen Experiment und Theorie in ihrer Aussage überein, sind Simulationen chaotischer Systeme durch vereinfachte Modelle möglich und vor allem physikalisch sinnvoll. Außerdem soll untersucht werden, für welche Zeiträume diese Vorhersagen richtig sind. Neben den Trajektorien soll auch ein Fraktal erstellt werden, das als eine Art Karte jedem Startpunkt einen eindeutigen Endpunkt zuordnet.

Beschreibung des Experiments

Das Pendel besteht, wie in Abb. 1 zu sehen ist, aus drei symmetrisch angeordneten, stromdurchflossenen Spulen, über deren Mittelpunkt eine Eisenkugel an einem langen Faden befestigt ist. Das Gravitationspotential sowie die Magnetkraft verursachen die Pendelbewegung des ausgelenkten Pendels. Die Luftreibung bremst das Pendel ab, bis es einen stationären Zustand über einer der Spulen einnimmt. Ein Staubsauger, der die Kugel ansaugen kann, soll gleichmäßige Startbedingungen sowie einen festen Startpunkt liefern.

Die Bewegung wird in Form von Trajektorien aufgenommen, die mit Hilfe eines Trackingprogramms in der x-y-Ebene dargestellt werden. Abb. 2 zeigt eine solch aufgenommene Trajektorie. Die Punkte repräsentieren die Standorte der Magneten (grün, dunkelblau und rot), sowie die zum Zeitpunkt t aktuelle Position der Kugel (lila) und den Startpunkt (grau), die Kurve (blau) beschreibt den Weg des Pendels.

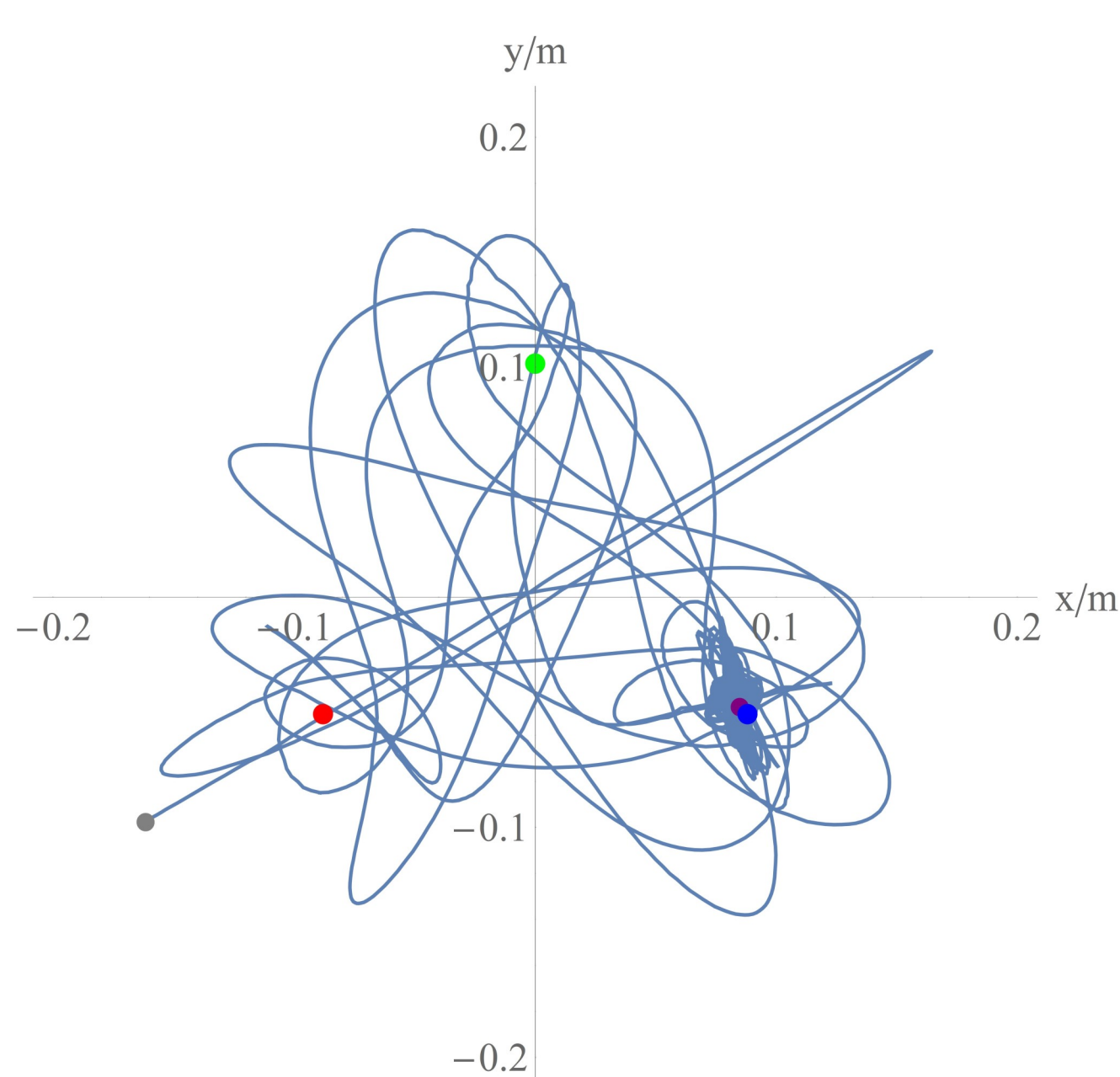


Abbildung 2: Experimentell aufgenommene Trajektorie

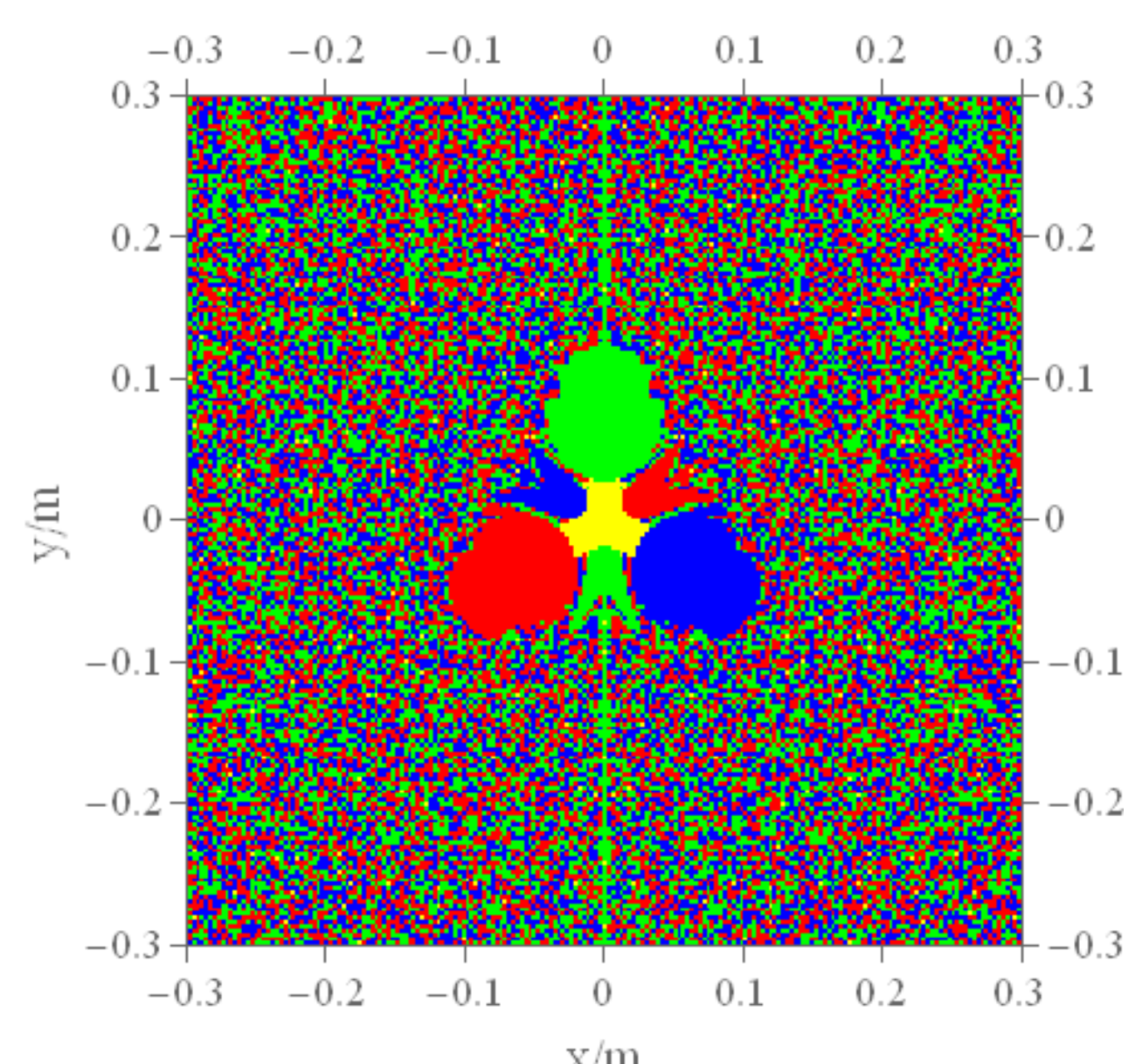


Abbildung 4: Fraktal mit angepasster Reibung (rot, blau und grün stehen für die jeweiligen Magneten, gelb den Mittelpunkt)

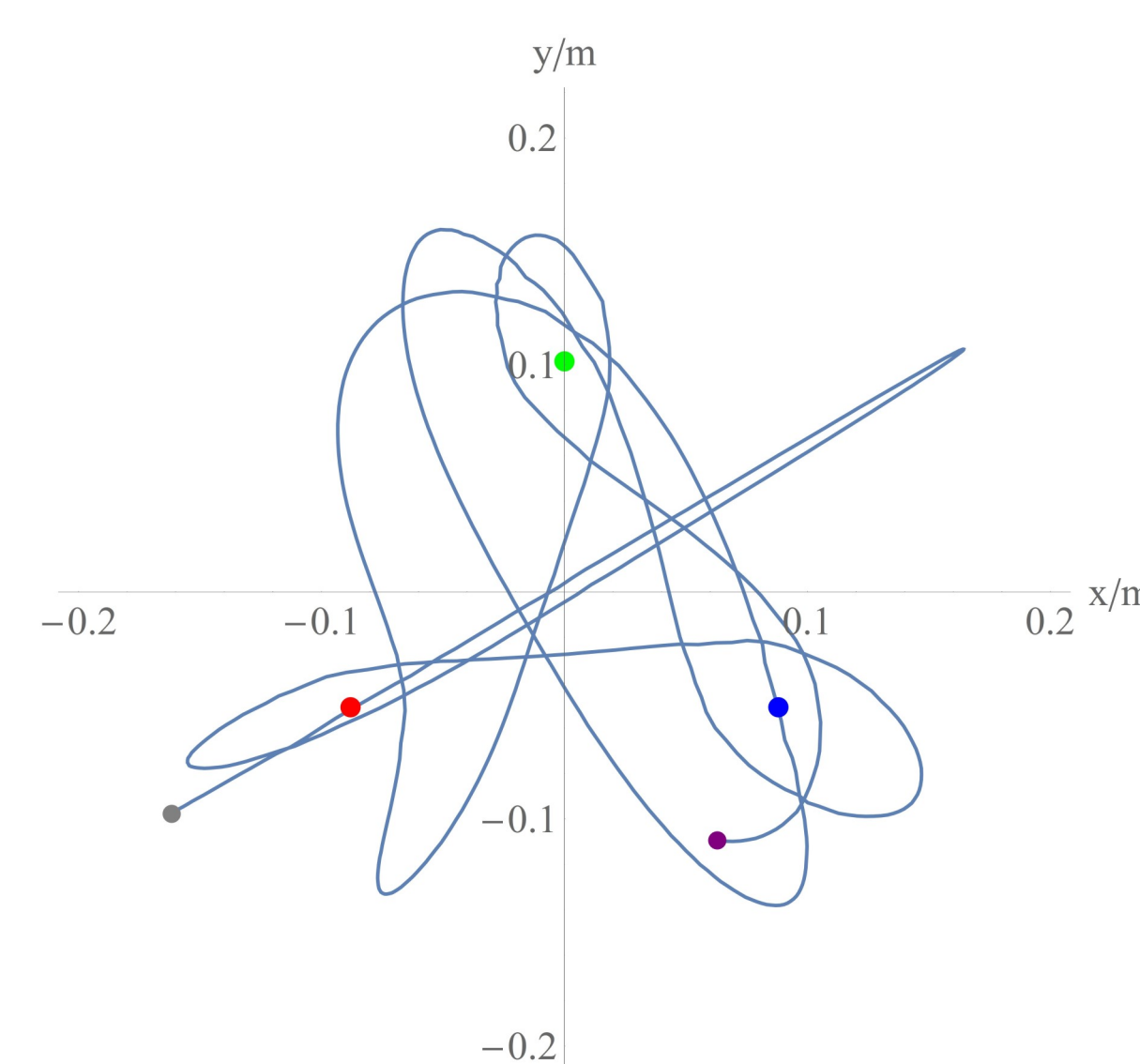


Abbildung 2a: Ausschnitt der experimentellen Trajektorie für $t < 11$ s

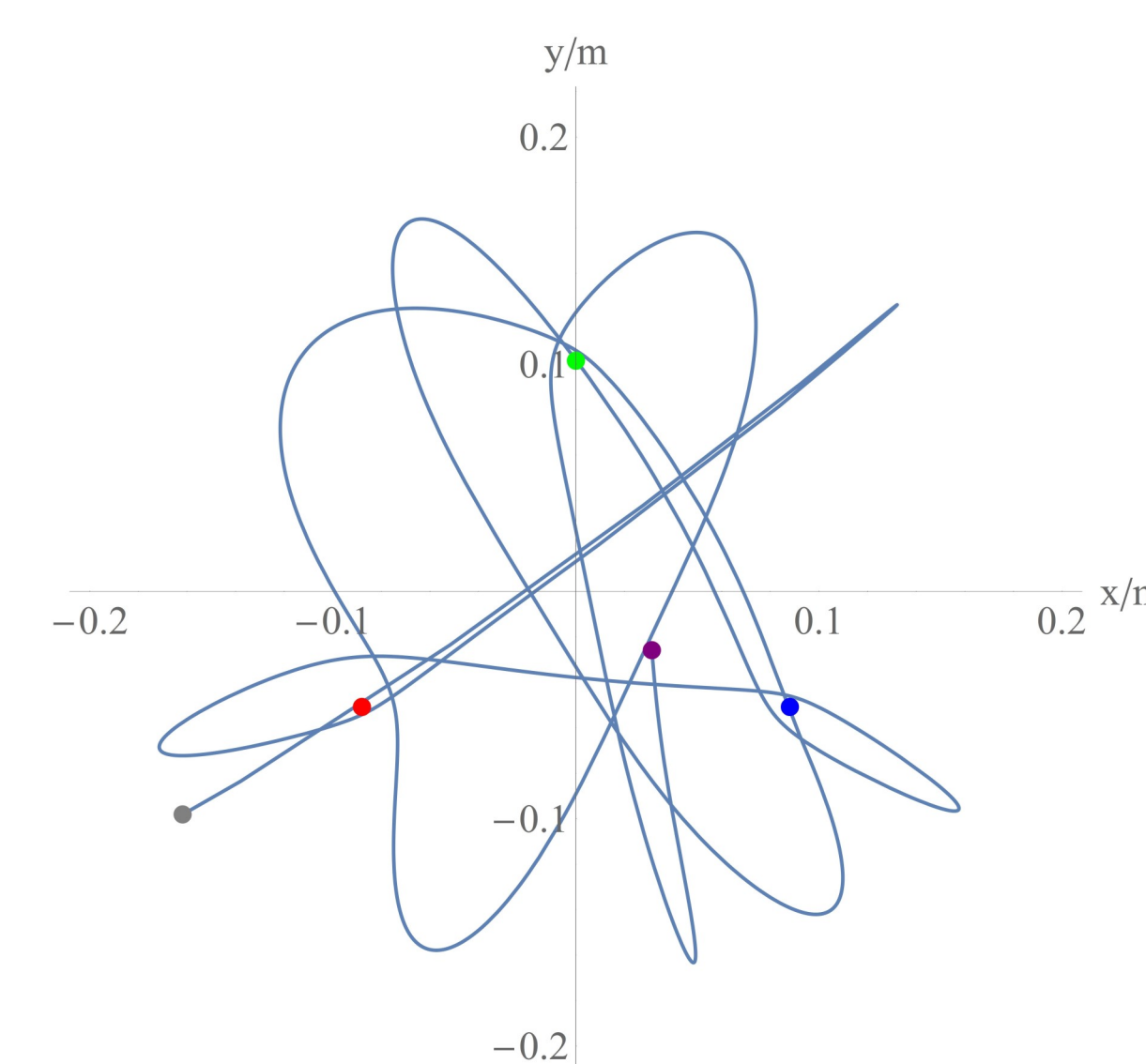


Abbildung 3: Theoretisch simulierte Trajektorie für $t < 11$ s

Beschreibung der Theorie

Die Bewegungsgleichung des Pendels ist analytisch nicht lösbar. Es werden folgende vereinfachende Annahmen genutzt, damit die numerische Lösung durch Mathematica mit vorhandenen Rechenkapazitäten möglich ist. Außerdem sollen diese den Vergleich zwischen Experiment und Theorie erleichtern. Die simulierte Trajektorie kann Abb. 3 entnommen werden, Abb. 4 zeigt das errechnete Fraktal.

1. Metallkugel und Spulen werden als punktförmig angenommen
2. Die Masse des Fadens wird gegenüber der Kugelmasse vernachlässigt
3. Das Pendel schwingt in einer Ebene
4. Die Luftreibung lässt sich durch Stokes'sche Reibung beschreiben

Dies führt zu folgender Differentialgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\underbrace{\mu \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{[(\vec{r} - \vec{r}_i)^2 + d^2]^{3/2}}}_{\vec{F}_{\text{Magnete}}} - \underbrace{\frac{mg}{L} \vec{r}}_{\vec{F}_{\text{Gewichtskraft}}} - \underbrace{\delta \dot{\vec{r}}}_{\vec{F}_{\text{Reibung}}} \quad \text{mit } \vec{r} = (x, y)$$

Bestimmung der Parameter

In der Differentialgleichung müssen Werte für die Luftreibung δ , die Magnetkonstante μ sowie die Masse m der Kugel und die Länge l des Fadens angegeben werden. Ebenso wird der mittlere Abstand d der Pendelebene zu den Magneten benötigt.

Die Luftreibung wurde gemessen, indem der Ausschwingvorgang bei ausgeschalteten Magneten aufgenommen und die Amplitudenabnahme beobachtet wurde. Für die Magnetkonstante wurde der Abstand der Kugel verändert und die wirkende Kraft (Kugel senkrecht über Magnet) gemessen, die Auswertung ist in Abb. 5 zu sehen. Die sich ergebenden Konstanten sind in nebenstehendem Kasten aufgelistet.

Werte der Parameter

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{m} &= 1,191 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s} \pm 2,3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s} \\ \mu &= 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^2 \pm 7 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}^2 \\ d &= 14 \text{ mm} \pm 4 \text{ mm} \\ m &= 13,965 \text{ g} \pm 0,0016 \text{ g} \\ l &= 194,75 \text{ cm} \pm 0,15 \text{ cm} \end{aligned}$$

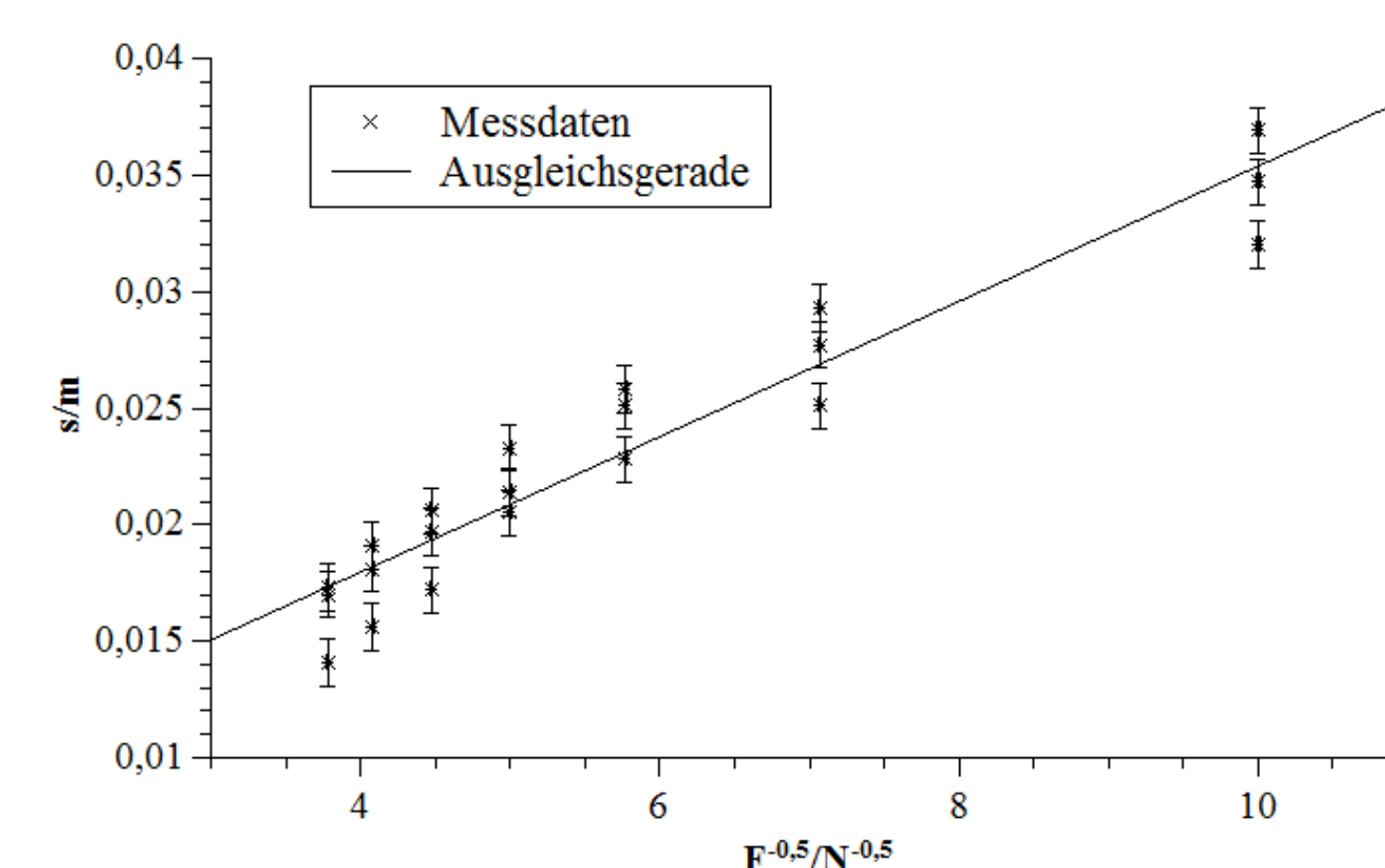


Abbildung 5: Kraft auf die Kugel in Abhängigkeit des Abstandes

Diskussion der Ergebnisse

Die experimentell ermittelten Trajektorien zeigen auch bei gleichen Startpunkten unterschiedliche Endzustände. Ein Vergleich der zeitlichen Verläufe (QR-Code) zeigt, dass ab etwa 4 s die Bewegungen stark voneinander abweichen. Entsprechend ist eine Vorhersage des Endmagneten nicht möglich. Ein Grund könnte sein, dass nur näherungsweise gleiche Startbedingungen, etwa in der Luftströmung, garantiert werden konnten.

Die theoretischen Trajektorien lassen sich also nur bedingt mit den experimentellen vergleichen. Allerdings gibt es Messungen, in denen beide weitgehend übereinstimmen. Besonders für kurze Zeiten liefert die numerische Simulation gute Vorhersagen. Das Ziel, ei-

ne numerische Simulation zu verwenden, um Bahnverläufe vorherzusagen, ist also bei gut bekannten Anfangsbedingungen physikalisch sinnvoll möglich. Die Annäherung an die Luftreibung durch Stokes trifft nur für kleine Zeiten zu, für längere Zeiträume muss eine stärkere Reibung angenommen werden. Die Schwierigkeit, die Vorhersage zu überprüfen, zeigt die Karte. Dort gibt es keine großen, stabilen „Inseln“, bei denen man sicher starten und einen bestimmten Magneten erwarten könnte. Präzisere Vorhersagen ließen sich durch bessere Bestimmungsmethoden für die Parameter und genauere Kenntnisse des Systems erreichen, dies war aus zeitlichen Gründen jedoch noch nicht möglich.

Literatur und Danksagung

Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar: Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer Science & Business Media, 29.06.2013, Seite 708 ff.

Martin Hanke. Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens, Wiesbaden 2009
Prof. Dr. R. Schlickeiser: Mechanik WS 2009/10 (Version vom 25.06.2016)

Ian James Win: <https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/win/presentation.pdf>, letzter Aufruf: 23.06.2016

<http://app.physik.uni-wuppertal.de/files/protokolle/VP15.pdf>, letzter Aufruf 22.06.2016

Bedanken möchten wir uns beim Institut für Theoretische Physik II, das die Software-Lizenzen für uns bereitgestellt hat.

