

SOWAS – Kapitza's Pendel

Isabel Pietka – Markus Sifft – Marcel Schroller – Leon Knarr – Zoe Fiedler | Betreuer: Nikolai Bart

Ein umgedrehtes starres Pendel kann durch harmonische Auf- und Abbewegung der Pendelaufhängung stabilisiert werden. Dies erscheint zunächst kontraintuitiv. Diesen Effekt entdeckte Pjotr Kapitza an Pendeluhren und dieses Projekt befasst sich mit dem Bau eines solchen umgedrehten Pendels und damit, einige Eigenschaften und Zusammenhänge dieses Pendels zu erforschen sowie die experimentell bestimmten Werte mit der Theorie zu vergleichen.



Aufbau

Das Pendel wird durch eine Schwungscheibe angeregt, die durch einen Motor mit Getriebe bewegt wird. Die Anregungsamplitude lässt sich dabei über Bohrungen in der Schwungscheibe variieren. Durch eine Führungsschiene wird die Bewegung des Pendels auf einen Freiheitsgrad beschränkt. Eine Lichtschranke sowie eine GoPro-Kamera ermöglichen die Messungen der Anregungsfrequenz und die Aufnahmen der Trajektorie der Pendelspitze.

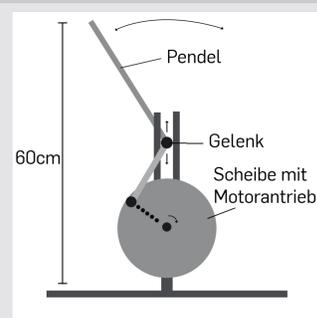


Abb. 1: Skizze des Kapitza-Pendels

Messungen

Die Schwingfrequenz f_s des Pendels wurde bei verschiedenen Kombinationen aus Anregungsamplitude A , Anregungsfrequenz f_a und Pendellänge l ermittelt, bei denen sich das Pendel in aufrechter Lage stabilisiert. Dafür wurde das Pendel aus der Ruhelage ausgelenkt und aus den mit der GoPro-Kamera aufgenommenen Trajektorien die Schwingfrequenz des Pendels abgelesen.

Theorie / Grundlagen

Die Bewegung des Pendels lässt sich mit den Euler-Lagrange-Gleichungen beschreiben. Für die Lagrange-Gleichung findet sich:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + ml(g + Af_a^2 \cos(f_a t)) \cos(\varphi) \quad (1)$$

Für die Bewegungsgleichung folgt dann anschließend:

$$\ddot{\varphi} = -(g + Af_a^2 \cos(f_a t)) \frac{\sin(\varphi)}{l} \quad (2)$$

Da diese Differentialgleichung nicht analytisch lösbar ist, wurde sie stattdessen numerisch in Maple gelöst.

Mit den Näherungen, dass die Anregungsfrequenz sehr viel größer ist als die Schwingfrequenz ($f_a \gg f_s$) und für große Pendel ($l \gg A$),

ergibt sich für das effektive Potential:

$$V_{eff} = -mgl \cos(\varphi) + m \left(\frac{Af_a}{2} \sin(\varphi) \right)^2 \quad (3)$$

Damit besitzt das Potential ein zweites Minimum, falls gilt:

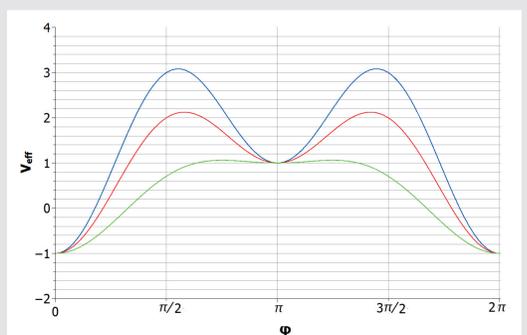
$$(Af_a)^2 > 2gl \quad (4)$$


Abb. 2: Potentialverläufe bei verschiedenen Anregungsfrequenzen in Abhängigkeit des Auslenkwinkels. Je höher die Anregungsfrequenz, desto ausgeprägter das lokale Minimum, bei dem sich das Pendel in aufrechter Position stabilisiert.

Auswertung

Trägt man die Schwingfrequenz des Pendels über die Anregungsfrequenz auf, wird sowohl in den empirischen als auch theoretischen Daten ein **annähernd linearer Zusammenhang** sichtbar: **Die Schwingfrequenz nimmt proportional mit abnehmender Pendellänge, größerer Anregungsfrequenz und -amplitude zu.** Dies spiegelt auch das effektive Potential wider (\rightarrow Abb. 2). Die Theorie zeigt allerdings, dass sich das Pendel bei den im Versuch verwendeten Einstellungen (Pendellänge, Amplitude, Anregungsfrequenz) eigentlich nicht stabilisieren lassen sollte. Gründe hierfür sind vermutlich die vernachlässigte Reibung als auch ein nicht vollkommen genauer Versuchsaufbau. Trotzdem zeigt die graphische Auswertung eine starke Ähnlichkeit.

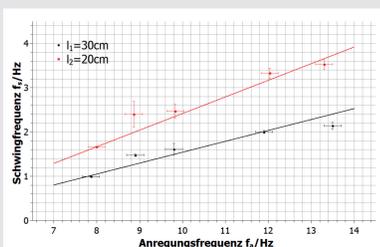


Abb. 3: Schwingfrequenz in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz bei $A = 8$ cm und verschiedenen Pendellängen

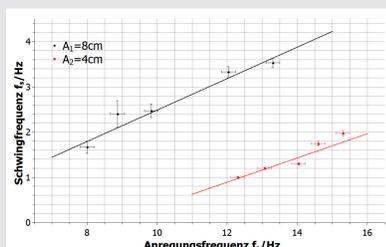


Abb. 4: Schwingfrequenz in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz bei $l = 20$ cm und verschiedenen Amplituden

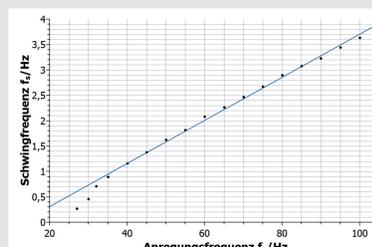


Abb. 5: Theoretischer Zusammenhang zwischen Schwingfrequenz und Anregungsfrequenz bei $l = 30$ cm und $A = 8$ cm. Für große f_a findet sich ein linearer Zusammenhang

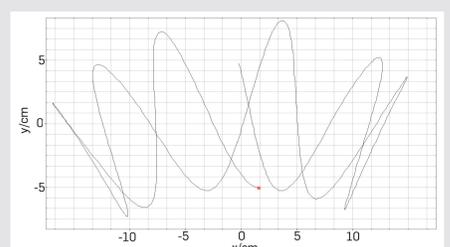


Abb. 6: MATLAB-Simulation der Trajektorie der Pendelspitze

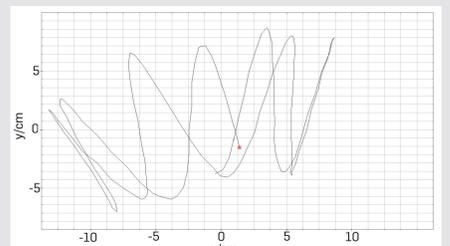


Abb. 7: Trajektorie der Pendelspitze aus Slowmotionaufnahme mit der GoPro-Kamera

Quellen

http://nldlab.gatech.edu/w/images/5/52/The_Inverted_Pendulum.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Kapitza%27s_pendulum
http://butikov.faculty.ifmo.ru/Oscillations/Inverted_Pendulum.pdf
http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/Midterm_Reports/Vibrating_pendulum_midterm_presentation.pdf

Abb. 8: Vergleich der minimalen Frequenzen, bei denen das Pendel gerade noch in aufrechter Lage stabil war. Die theoretischen Grenzfrequenzen $f_{g,t}$ sind deutlich größer als die im Experiment gemessenen Grenzfrequenzen $f_{g,e}$.

l/cm	A/cm	$f_{g,t}$ /Hz	$f_{g,e}$ /Hz
30	8	32,5	7,9
20	8	27,4	8,0
20	4	52,3	12,3