

Ein Zylinder als fairer „Würfel“

SOWAS-Projekt 2019: Gruppe M

Nico Brosda, Jannik Gondolf, Nils Lange, Luca Weckelmann
 Projektleiter: Steffen Schüttler

1. Einführung & Motivation:

Würfel sind als alltägliche Zufallsgeneratoren jedem bekannt, vor allem der herkömmliche 6-seitige Spielwürfel. Dabei sollen Würfel natürlich als fair gelten, also gleichwahrscheinlich auf jeder ihrer Seiten landen. Auffällig ist, dass alle bekannten Würfel, die als fair gelten, platonische Körper sind. Deshalb war es Ziel dieses Projektes zu untersuchen, ob auch nicht platonische Körper (wie etwa Zylinder oder Pyramiden) als faire Würfel gelten können bzw. wie man eine entsprechende Geometrie dieser Körper finden kann.

2. Modellbildung:

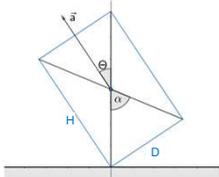
- Ein rotierender Vollzylinder kann durch seinen Durchmesser D , seine Höhe H , seine Masse m , seine Position und Orientierung im Raum und seine Rotationsachse samt Winkelgeschwindigkeit vollständig beschrieben werden.
- Der Öffnungswinkel, der zu einem beliebigen Zeitpunkt mit der z-Achse eingeschlossen wird berechnet sich wie folgt:

$$\theta(t) = \arccos([T^{-1}(\vec{\omega}) R_z(\omega t) T(\vec{\omega}) \vec{a}_0]_z) \quad (1)$$

- Die Fallzeit kann mithilfe des Fallgesetzes bestimmt werden und somit auch der Auftreffwinkel. Zur theoretischen Bestimmung des D/H -Verhältnisses werden zwei Ansätze gewählt:

Methoden 1: Kritische Winkel

- Betrachtung, bei welchem Neigungswinkel Schwerpunkt exakt über der Kippkante liegt.
- Alle so entstehenden Winkelintervalle sollen gleich groß sein.



- Die Auftreffseite hängt dann wie folgt vom Auftreffwinkel ab:

Tab. 1: Würfelintervalle

Ergebnis:	Intervall:	Intervallgröße:
Kopf	$0 \leq \theta < \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$
Mantelfläche	$\frac{\alpha}{2} < \theta \leq \pi - \frac{\alpha}{2}$	$\pi - \frac{\alpha}{2}$
Zahl	$\pi - \frac{\alpha}{2} < \theta \leq \pi$	$\frac{\alpha}{2}$

Bei Gleichheit der Intervallgrößen ergibt sich dann das geometrische Verhältnis:

$$\frac{D}{H} = \sqrt{3}$$

Für andere geometrische Körper können die Methoden ähnlich angewandt werden.

Bei einer Pyramide wird so folgendes Verhältnis bestimmt:

$$\frac{H}{L} = \sqrt{2}$$

Methoden 2: Umkugel

- Betrachtung einer Umkugel, welche den Zylinder an seinen Kanten tangiert.
- Die drei entstehenden Raumwinkelsegmente sollen gleich groß sein.

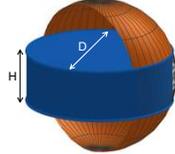


Abb. 2: Zylinder (blau) und Aufschnitt der Umkugel. Orangene Kugelsegmente und durchsichtige Kugelscheibe um den Zylindermantel sollen je gleichgroße Flächen haben

- Durch Integration findet man so das Verhältnis:

$$\frac{D}{H} = 2\sqrt{2}$$

Legende:

- R_z : Rotationsmatrix um z-Achse
- \vec{a} : Orientierung des Zylinders, \vec{a}_0 : zur Zeit $t = 0$
- $\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit
- T : Transformationsmatrix, transformiert $\vec{\omega}$ auf die z-Achse
- T^{-1} : Rücktransformation
- τ : Fallzeit
- θ : Neigungswinkel, $\theta = \theta(\tau)$: Auftreffwinkel
- D : Zylinderdurchmesser
- H : Zylinder- bzw. Pyramidenhöhe
- L : Kantenlänge der Pyramiden Grundfläche

3. Experiment:

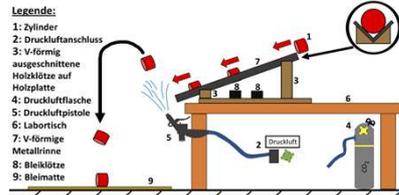


Abb. 3: Skizze von Versuchsaufbau 1

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ und Pyramide (Versuchsaufbau 1):

- Zylinder wird wie in Abb. 3 auf der Aluminiumschiene angebracht, bei der Pyramide zeigt die Spitze nach vorne.
- Pyramide bzw. der Zylinder rutschen nun die Aluminiumschiene herunter, bei Eintritt in den Luftstrom: \rightarrow Rotation
- Zufallskomponente des Wurfs durch turbulente Charakter der Luftströmung
- Bereich des Höhepunktes der Flugbahn/Trajektorie wird vor der im Hintergrund angebrachten Skala mit Kamera gefilmt
- Bestimmung von maximaler Flughöhe und Winkelgeschwindigkeit aus Videomaterial
- Insgesamt 10 Durchgänge pro Verhältnis
- Zur Bestimmung des Wurfresultates wird der Moment des Aufpralls ebenfalls gefilmt
- Pro Verhältnis wird 100 mal der Aufprall gefilmt.

$2\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ (Versuchsaufbau 2):

- Schlauch der Luftdruckpistole wird an der Gasflasche angebracht
- Zylinder wird mit Mantelfläche senkrecht zur Schiene auf Öffnung der Druckluftpistole gelegt
- Mit der Kamera werden analog Höhe, Winkelgeschwindigkeit und Auftreffpunkt in der selben Anzahl für jedes Seitenverhältnis gefilmt.

Realbedingungen:

Die Körper werden auch mit einem Würfelbecher unter Realbedingungen auf hartem und weichem Untergründe gewürfelt (pro Verhältnis insgesamt 800 mal, Pyramide: insgesamt 200 mal).



Abb. 4: Die drei Zylinder (rot: $\sqrt{3}$, grün: $\sqrt{5}$, gelb: $2\sqrt{2}$) mit kleinem ($D = 20,3\text{mm}$) und mittlerem ($D = 25,0\text{mm}$) Durchmesser, sowie ein Pyramiden - Fehltruck

4. Simulation:

- Die in der Modellbildung beschriebene Zylinderbewegung (1) wurde in einem Python Programm realisiert.
- Für die verschiedenen Verhältnisse wurde die Bewegung mit den im Experiment ermittelten Daten simuliert und der Auftreffwinkel berechnet.
- Anhand der kritischen Winkel (siehe Modellbildung) kann entschieden werden, auf welcher Seite der Zylinder so gelandet ist.
- Mit Hilfe der Simulation werden die erwarteten Verteilungen je auf 200 Höhen und 200 Winkelgeschwindigkeiten extrapoliert. Insgesamt gibt es so je 40.000 Datenpunkte. Die Häufigkeit der Wertepaare wird durch eine zweidimensionale Normalverteilung auf Basis der experimentell ermittelten Mittelwerte und Standardabweichungen gewichtet.

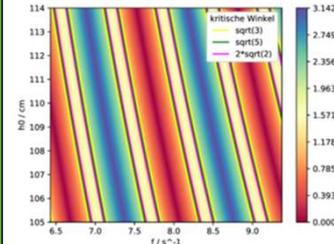


Abb. 5: Auftreffwinkel für die Daten aus der $\sqrt{3}$ -Messreihe, h_0 : Flughöhe, f : Rotationsfrequenz

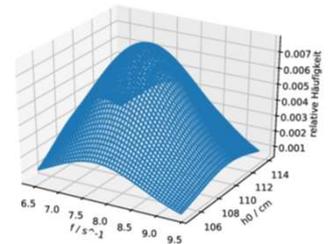


Abb. 6: Verteilung der Datenpunkte für die $\sqrt{3}$ -Messreihe

- Abbildung 5 zeigt den Auftreffwinkel in Abhängigkeit der Wurfparameter. Rote und blaue Bereiche bedeuten ein Landen auf der Kopf- bzw. Zahl-Seite, gelbe Bereiche ein Landen auf der Mantelfläche. Die farbigen Linien geben die Grenzen der Bereiche beim jeweiligen Verhältnis an.

5. Auswertung:

- Die resultierenden prozentualen Verteilungen aus Simulation, vom Würfelmechanismus und aus der Realbedingung sind in folgenden Diagrammen aufgetragen:

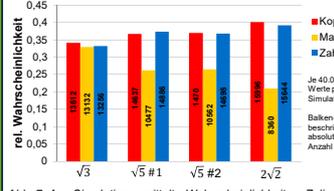


Abb. 7: Aus Simulation ermittelte Wahrscheinlichkeiten, Zylinder

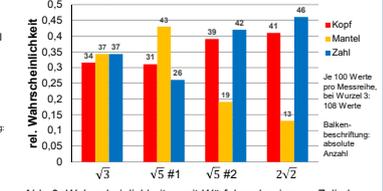


Abb. 8: Wahrscheinlichkeiten mit Würfelmechanismus, Zylinder

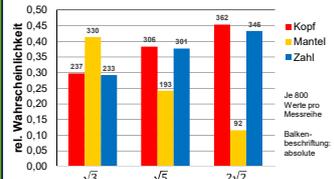


Abb. 9: Wahrscheinlichkeiten unter Realbedingungen, Zylinder

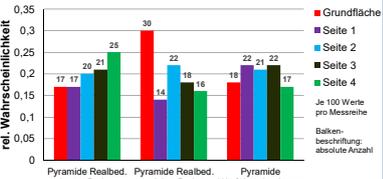


Abb. 10: Wahrscheinlichkeiten unter Realbedingungen, Pyramide

Die Akzeptanzintervalle für ein Würfelereignis, bei denen die Körper als fair gelten, sind bei einer Binomialverteilung und einem Signifikanzniveau von 5%:

Tab. 2: Akzeptanzintervalle

Würfe	100	108	800	40000 (Simulation)	100 (Pyramide)
Intervalle	[25, 41]	[27, 45]	[242, 291]	[13149, 13517]	[13, 27]

6. Fazit:

- $\sqrt{3}$: Der Zylinder gilt in Simulation und Würfelmechanismus als fairer Würfel, landet unter Realbedingungen allerdings zu häufig auf der Mantelfläche. Dies wird bedingt durch die Eigenschaften des Würfelvorgangs unter Realbedingungen.
- $\sqrt{5}$: Sowohl in Experiment als auch Simulation gilt der Zylinder nicht als fair. Es zeigt sich die Tendenz eines zu seltenen Auftreffens auf der Mantelfläche.
- $2\sqrt{2}$: Der Zylinder kommt in Experiment und Simulation deutlich zu selten auf der Mantelfläche auf.
- Das Modell der Umkugel liefert aufgrund der fehlenden Betrachtung von Realbedingungen, wie z.B. Lage des Schwerpunktes, kein sinnvolles Ergebnis für den Zylinder.
- Die Gültigkeit des Modells für die Betrachtung von kritischen Winkeln konnte experimentell bestätigt werden, unter Realbedingungen ergeben sich aber Abweichungen (etwa aufgrund der Zylinderausrichtung im Würfelbecher).
- Ein faires Verhältnis von D zu H unter Realbedingungen läge zwischen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$
- Pyramide:** Es ergibt sich eine Abweichung für das Würfeln unter Realbedingungen auf weichem Untergrund, dies kann durch die Ausrichtung der Pyramide im Würfelbecher und das fast direkte Liegenbleiben auf weichem Untergrund erklärt werden.
- Die Theorie für die Pyramide wird neben dieser Abweichung als bestätigt erachtet.