

## 1. Motivation

Tilgerpendel werden in schwingungsgefährdeten Bauwerken eingesetzt, um die Amplitude der Objektschwingung, angeregt z.B. durch Erdbeben oder Wind, zu senken. Unser Ziel ist es die Eigenfrequenz eines Pendels auf die Resonanzfrequenz eines Hochhaus-Modells abzustimmen. Diese Kopplung führt innerhalb der Resonanzkurve des Hauptsystems zu einer Schwingungsreduktion, außerhalb des Resonanzbereiches zu einer Verstärkung der Amplituden. Die resultierenden Eigenfrequenzen werden untersucht.

## 2. Versuchsaufbau

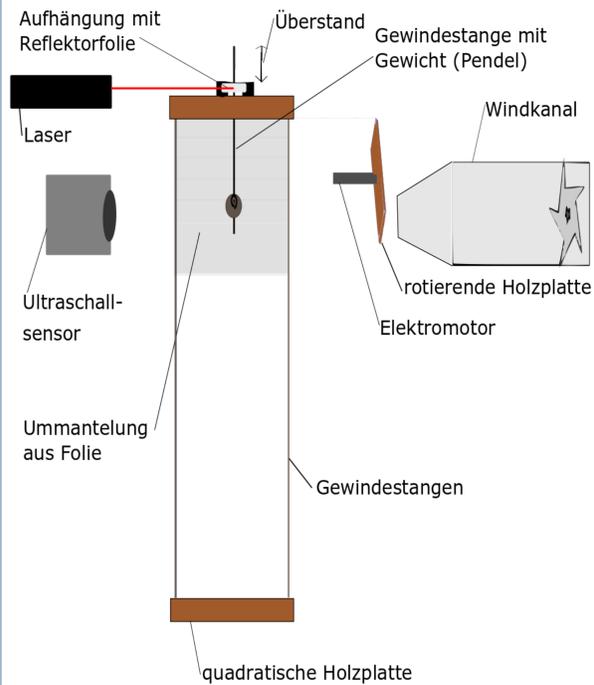


Abbildung 1 Hochhausmodell (10x10x100cm) mit Mess- und Anregungsinstrumenten

## 3. Theorie

Betrachtet man das frei schwingende Stabpendel so kann man zunächst eine gedämpfte harmonische Schwingung ansetzen:

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (1)$$

Der Term  $\gamma\dot{\varphi}$  entspricht einer Dämpfung. Die eigentliche Rückstellkraft ergibt sich aus dem Drehmoment  $T$ :

$$T = |\vec{r} \times \vec{F}| = -lgM(a)\varphi \quad (2)$$

wobei sich  $M(a)$  aus der Geometrie des Körpers ergibt. Nimmt man das Stabpendel als starren Körper an, d.h. aus

$$T = J(a)\ddot{\varphi} \quad (3), \text{ ergibt sich } \omega_0^2 = \frac{lgM(a)}{J(a)} \quad (4)$$

Durch die Rechnung erhält man:  $\omega_0 \propto a$  (s. Abbildung 4).

Um die Gebäudeschwingung zu betrachten ist es notwendig sich die Rückstellkraft anzusehen. Diese ergibt sich über die Schubspannung  $\tau$ , welche analog zum Hookeschen Gesetz formuliert wird:

$$\tau = \frac{F}{A} = -G\sin(\phi) \quad (5)$$

Für einen einseitig eingespannten Stab der Länge  $l$  ergäbe sich damit (s. dazu auch Abbildung 5)

$$mg = -GA\sin(\phi) = -GA \frac{\Delta\epsilon}{l} \quad (6)$$

Für das Gebäude selbst erhält man somit, unter der Annahme einer gedämpften harmonischen Schwingung (s. Abbildung 6)

$$\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} + \psi_0^2\alpha = 0 \quad (7)$$

Auch hier entspricht  $\mu\dot{\alpha}$  einer Dämpfung. Wenn man nun ein Drehmoment  $T$  betrachtet und die Rückstellkraft durch das Schubmodul gibt, so ist:

$$T = J\ddot{\alpha} = -4lGA\sin(\alpha) \quad (8) \text{ bzw. } \psi_0^2 = \frac{4lGA}{J} \quad (9)$$

## 6. Fazit

Der experimentell bestimmte lineare Zusammenhang zwischen der Pendelfrequenz und dem Überstand konnte theoretisch erfolgreich geklärt werden (beachte Übereinstimmung Gerade und Taylorentwickelte). Die Resonanzfrequenz, die über das Schubmodul theoretisch bestimmt wurde, weicht um 23,2% von dem experimentellen Wert ab.

Bereits bei der einmaligen Auslenkung des Gebäudes führt das auf die Eigenfrequenz eingestellte Pendel zu einer deutlichen Reduzierung der Amplitude, allerdings hat sich dabei die Dauer bis zur Ruhe des Gebäudes etwas erhöht (Abbildung 6). Die Zielsetzung der Reduktion der Amplitude im Bereich der ursprünglichen Resonanzfrequenz des Gebäudes durch einstellen des Pendels auf diese, ist erreicht worden. Ebenso konnten neue Resonanzen ober- und unterhalb im Frequenzbereich gefunden werden. Tatsächlich erfüllt das Pendel diese Eigenschaften auch, wenn es auf die variierten Frequenzen eingestellt wurde, deren Peaks um die neuen Resonanzen zusätzlich noch kleiner sind.

Der Zusammenhang zwischen Pendelfrequenz und Stärke und Lage von neuen Resonanzen könnte durch weitere Messungen genauer untersucht werden. Ebenso wäre eine Untersuchung von dem Einfluss der Pendelmasse und der Pendeldämpfung von Interesse, um eine breitbandigere Senkung der Amplitude zu erreichen, um es auf reale breitbandig anregende Winde einzustellen.

## 4. Versuchsdurchführung

Nach Anfertigung des Modellgebäudes und des Tilgerpendels ähnlicher Eigenfrequenz, wurde die Eigenfrequenz des isolierten Pendels in Abhängigkeit vom Pendelüberstand mithilfe einmaliger Auslenkung bestimmt. Dafür wurde über die doppelte Laufzeit eines Laserstrahls zwischen Laser und an der Pendelaufhängung angebrachte Reflektorfolie die Bewegungskurve mit Cassy-Lab aufgenommen. Eine der Bewegungskurven ist in (Abbildung 2) gezeigt. Mithilfe der Kurven können Periodendauer und Dämpfung bestimmt werden (Abbildung 4).

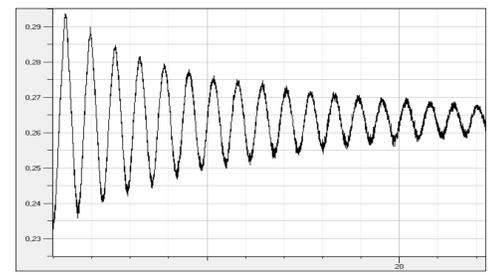


Abbildung 2 Pendelbewegungs-kurve (Weg-Zeit-Diagramm)

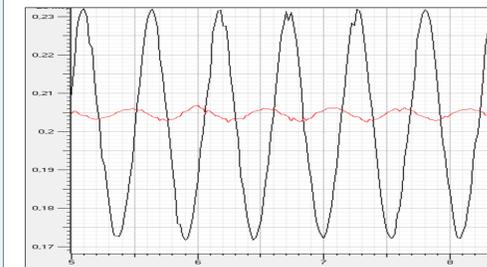


Abbildung 3 Gebäudebewegungskurve (Weg-Zeit-Diagramm)  
Schwarz: bei fixiertem Pendel, nahe Resonanzfrequenz  
Rot: bei freiem auf Resonanzfrequenz eingestellten Pendel, bei gleicher Frequenz

Für die weiteren Messungen erzeugte die Kombination aus Windkanal und davor rotierender Holzplatte periodisch angreifende Winde an der Ummantlung des Gebäudes. Die sich einstellende periodische Bewegung des Gebäudes (nach abwarten des Einschwingvorgangs) erfasste ein Ultraschallsensor mit Cassy-Lab. Durch Veränderung der Motordrehgeschwindigkeit konnten die Frequenz beeinflusst werden. Die Messkurven liefern dann die Amplitude der Gebäudeschwingung und die Frequenz. Zunächst wurde derart mit durch Bändern fixiertem Pendel gemessen, um die Resonanzfrequenz des Systems ermitteln zu können (Beispiel: Abbildung 3, schwarze Kurve). Für die weiteren Messung wurde dann die Fixierung entfernt und mittels Geraden aus Abbildung 4 über Verstellung des Pendelüberstands das Pendel auf die Resonanzfrequenz eingestellt (Beispiel: Abbildung 3, rote Kurve). Zum tieferen Einblick wurde das Pendel auch noch auf variierte Frequenzen eingestellt (Abbildung 8).

Weiterhin wurde die Bewegung des Gebäudes nach einmaliger Auslenkung des Gebäudes mit fixiertem beziehungsweise eingestelltem freien Pendel aufgenommen (Abbildung 6). Zur Bestimmung des Schubmoduls wurde eine Gewindestange einseitig horizontal eingespannt und das freie Ende durch ein Kathetometer bei zunehmendem angehängtem Gewicht verfolgt.

## 5. Auswertung

Die Messung für das freie Pendel ergab, dass die Dämpfung unabhängig vom Überstand ist mit einem Wert von  $\gamma = (0,40 \pm 0,05) \frac{1}{s}$ . Zum Vergleich wurde zur theoretischen Kurve der Eigenfrequenz gegen den Überstand eine lineare Regressuin durchgeführt, zur experimentellen eine lineare Regression (angepasstes  $R^2 = 0,9755$ ) (s. Abbildung 4). Diese ergaben das Folgende:

$$\omega_0^{exp} = (0,72 \pm 0,03)cm^{-1}s^{-1}a + (10,01 \pm 0,07)s^{-1}; \omega_0^{theo} = (0,4633 \pm 0,0011)a \text{ cm}^{-1}s^{-1} + (9,54 \pm 0,003)s^{-1}$$

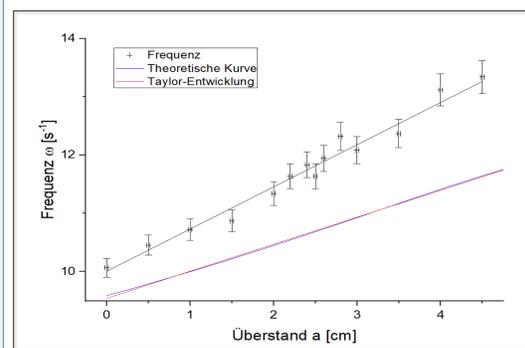


Abbildung 4 Die theoretische und die experimentell ermittelte Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Pendels gegen den Überstand a.

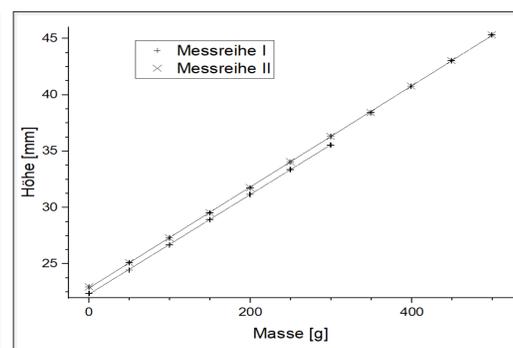


Abbildung 5 Höhe  $\epsilon$  eines einseitig eingespannten Stabes gegen die angehängte Masse.

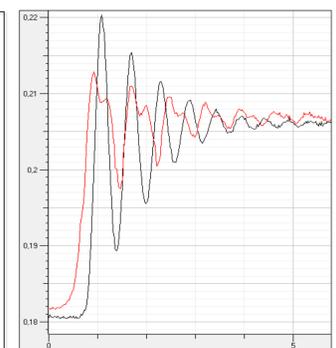


Abbildung 6 Freie Schwingung des Hochhauses  
Schwarze Kurve: fixiertes Pendel  
Rote Kurve: freies Pendel

Die Resonanzkurve des Hochhauses ist in Abbildung 7 dargestellt. Die Kurve besitzt eine für hohe Amplituden durchaus typische, stark abfallende rechte Flanke. Eine Lorentzianpassung (angepasstes  $R^2 = 0,8151$ ) ergibt eine Resonanzfrequenz von  $\psi_{Res}^{exp} = (10,9 \pm 0,09)s^{-1}$ , sowie eine Dämpfungskonstante  $\mu = (2,4 \pm 0,5)s^{-1}$ . Aus dem theoretischen Wert für die Eigenfrequenz  $\psi_0^2$  erhält man damit für die Resonanzfrequenz  $\psi_{Res}^{theo} = (8,38 \pm 1,21)s^{-1}$

Das Schubmodul liefert auf Basis lineare Regression (s. Abbildung 5; angepasstes  $R^2 = 0,9999$ )  $G = (1,39 \pm 0,04)MPa$ .

Die Kopplung des Systems ergibt dann eine Schwingungstilgung wie in Abbildung 8 gezeigt. Die neuen Resonanzfrequenzen sind in Tabelle 1 aufgeführt. Man erkennt eine vergleichsweise starke Dämpfung im Bereich der ursprünglichen Resonanzfrequenz.

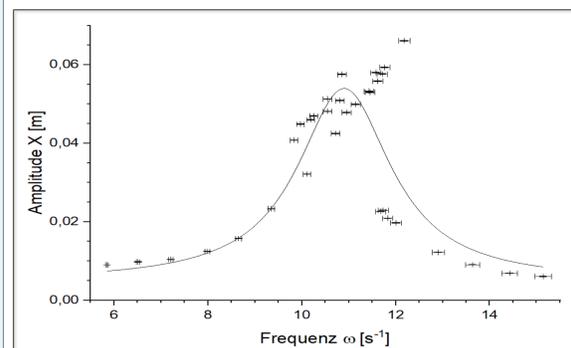


Abbildung 7 Resonanzkurve des Hochhauses mit fixiertem Pendel

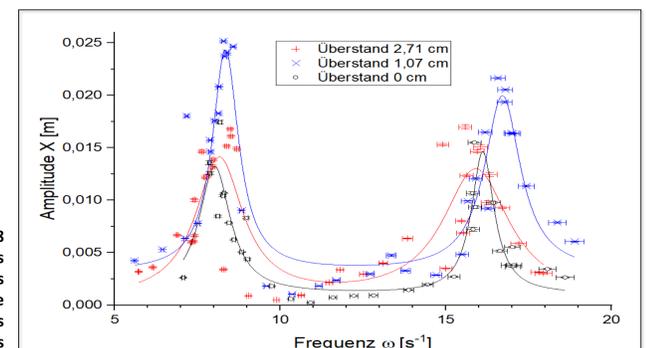


Abbildung 8 Resonanzkurven des gekoppelten Systems für verschiedene Eigenfrequenzen des Pendels

Tabelle 1: Resonanzfrequenzen des gekoppelten Systems gemäß Abbildung 7

Überstand a/cm	0,00±0,10	1,07±0,10	2,71±0,10
Resonanzfrequenz $1/s^{-1}$	8,02±0,08	8,35±0,05	8,16±0,12
Resonanzfrequenz $11/s^{-1}$	16,12±0,06	16,71±0,09	15,91±0,20
Angepasstes $R^2$	0,7873	0,8252	0,528

### Legende

- $\varphi$ : Pendelauslenkungswinkel gegenüber vertikalen Hausachse
- $\psi_0, \omega_0$ : Gebäude-/ Pendeleigenfrequenz
- $\gamma, \mu$ : Dämpfungskonstanten
- a: Überstand
- G: Schubmodul
- $\alpha$ : Auslenkungswinkel Gebäude gegenüber der Vertikalen
- $\phi$ : Winkel zwischen Stab und Horizontalen
- $\epsilon$ : Höhe im Kathetometer
- l: Gesamtlänge Stab
- J: Trägheitsmoment

### Quellen & Danksagung

- D. Meyer, A. Beer, S. Kunze, A. Beer Physikalisches Praktikum für Studierende der Physik Teil I, Version 30.Januar 2016
- U. Czarnetzki, Physik 1, Vorlesungsskript 2016/2017
- J. J. Connor, Introduction to Structural Motion Control (Chapter 4), Prentice Hal, 2002

Besonderer Dank an  
K.Ulrich, T. Domanski und S. Chur