Einführungsseminar „S1“
Elemente der Fehlerrechnung

Physikalisches Praktikum
der Fakultät für Physik und Astronomie
Ruhr-Universität Bochum

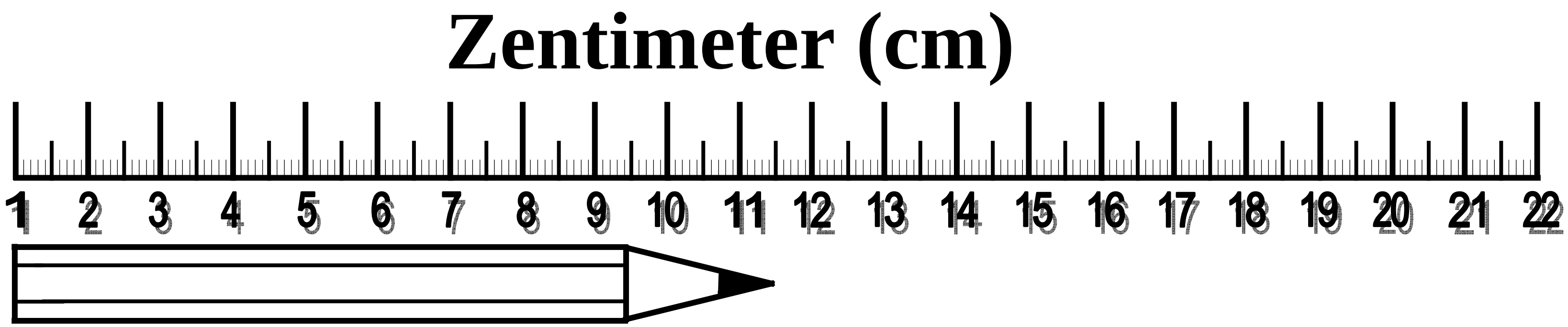
Literatur

- Wolfgang Kamke – Der Umgang mit experimentellen Daten, insbes. Fehleranalyse, im Physikalischen Anfänger-Praktikum
- John R. Taylor – Fehleranalyse
- Eichler, Kronfeld, Sahm – Das neue Physikalische Praktikum
- W. Walcher – Praktikum der Physik
- …

Einleitung

- Messungen sind <u>niemals</u> beliebig genau!
  - Sie sind stets mit Unsicherheiten (= Fehlern) behaftet.
  - Angabe der Messunsicherheit ist wichtig.
  - Signifikanz eines Ergebnisses muss einschätzbar sein!
  - Ein Ergebnis ist signifikant, wenn die Wahrscheinlichkeit für zufälliges Zustandekommen gering ist.

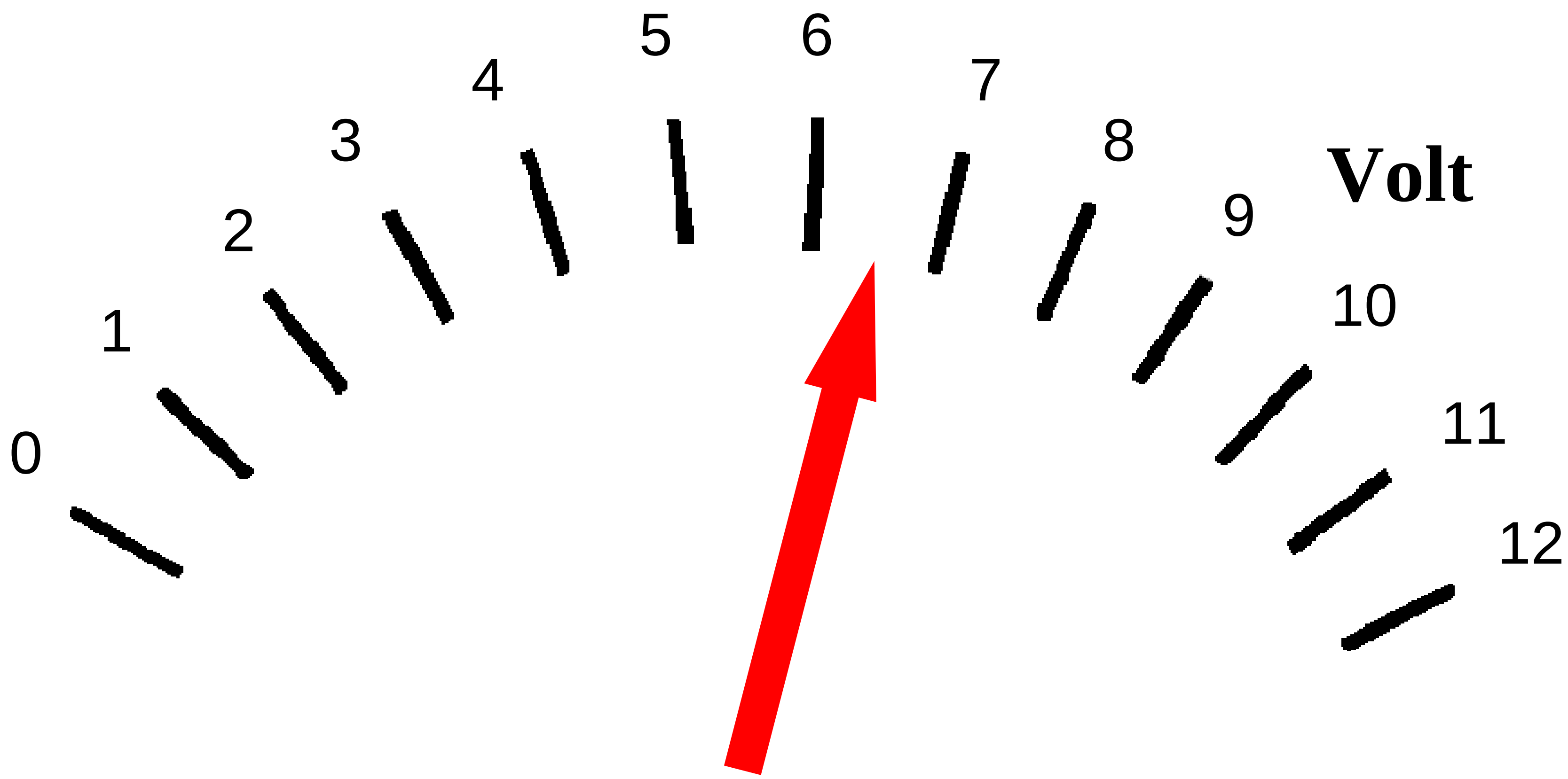
Beispiel: Messunsicherheit bei Längenmessung (z.B. mittels Lineal)



Bestwert der Länge = 10,5 cm

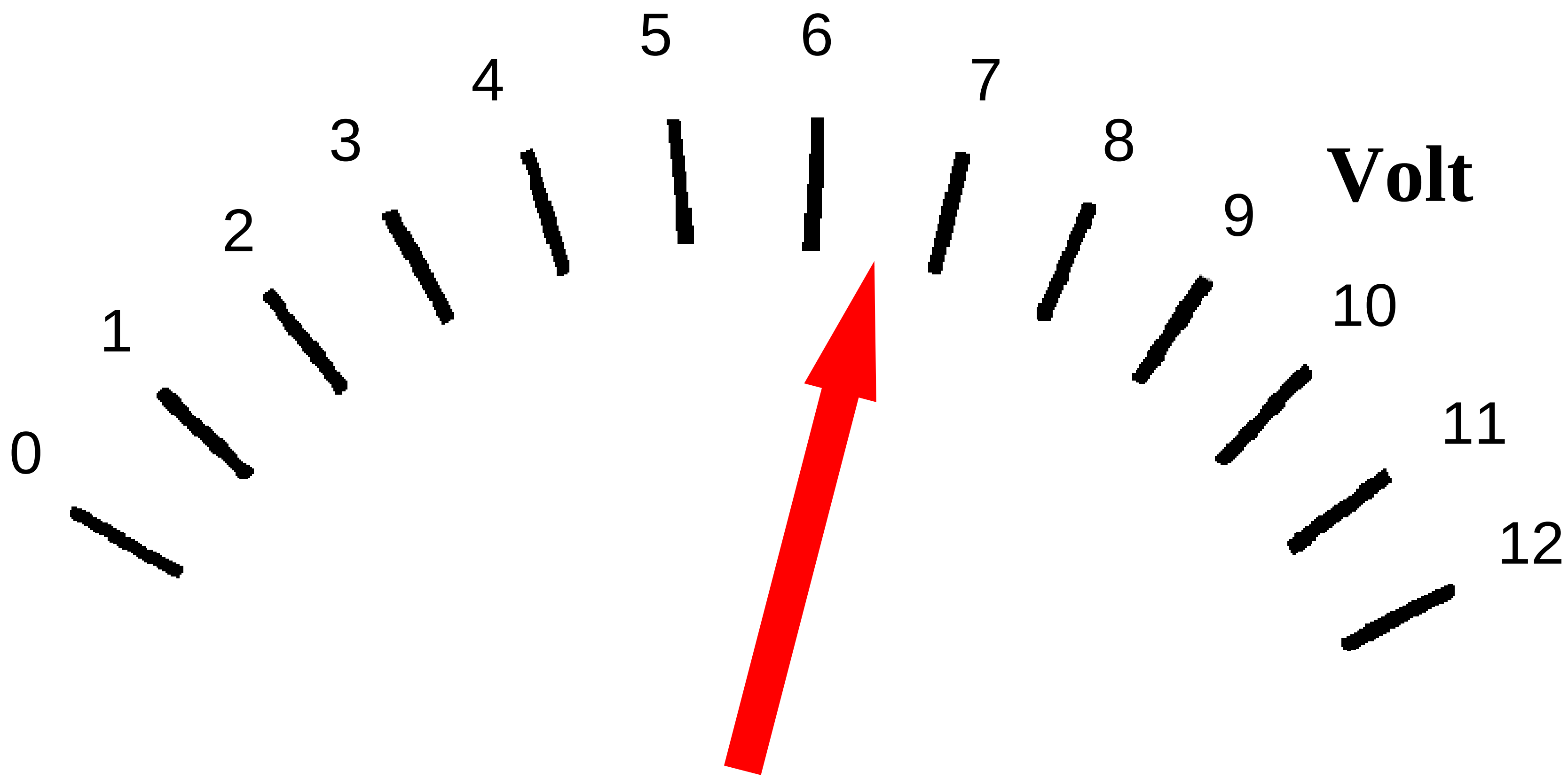
wahrscheinlicher Bereich 10,4 bis 10,6 cm

Beispiel: Messunsicherheit bei Zeigerinstrument (z.B. bei einem Voltmeter)



Bestwert der Spannung = 6,6 Volt
wahrscheinlicher Bereich 6,5 bis 6,7 Volt

Beispiel: Messunsicherheit bei Zeigerinstrument (z.B. bei einem Voltmeter)



Die Schätzung von Zeigerstellungen zwischen Teilungsstrichen heißt **Interpolation**!

Warum ist eine „vernünftige“ Einschätzung der Signifikanz wichtig?

Beispiel: Lichtablenkung im Gravitationsfeld eines Sterns als Beleg für Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie?!

klassische Theorie sagt voraus **(0,9‘‘)**
Relativistische Theorie (1911) sagt voraus **(1,8‘‘)**

Messung (1919) durch Dyson, Eddington und Davidson messen bei Sonnenfinsternis **(2‘‘)**
Wahrscheinlicher Bereich zu 95% **(1,7‘‘ - 2,3‘‘)**

Einleitung

- Wir unterscheiden…
  - **Systematische Messfehler** (Maßstab zu lang oder kurz, Uhr „geht falsch“, falsche Kalibrierung oder Eichung)
  - **Statistisch Fehler** (rein zufällige Messunsicherheiten, siehe Luftkissenbahn)

Arithmetisches Mittel

- Der sog. lineare Mittelwert der Messwerte liefert den besten Schätzwert, wenn nur statistische Fehler vorliegen.
- Bei *n* Messwerten aus *n* Messungen…

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Varianz und Standardabweichung

- Der beste Schätzwert für Messunsicherheit wird durch die sog. Standardabweichung geliefert!
- Die Abweichung eines Messwerts zum Mittelwert ist Maß für Fehler: $(x_i - \overline{x})$
- „Besser“ ist das Quadrat der Abweichung, die sogenannte **Varianz**:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

Standardabweichung

- Wir bezeichnen als die so genannte **Standardabweichung**:

$$\sqrt{\sigma^2} = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Lineare Regression

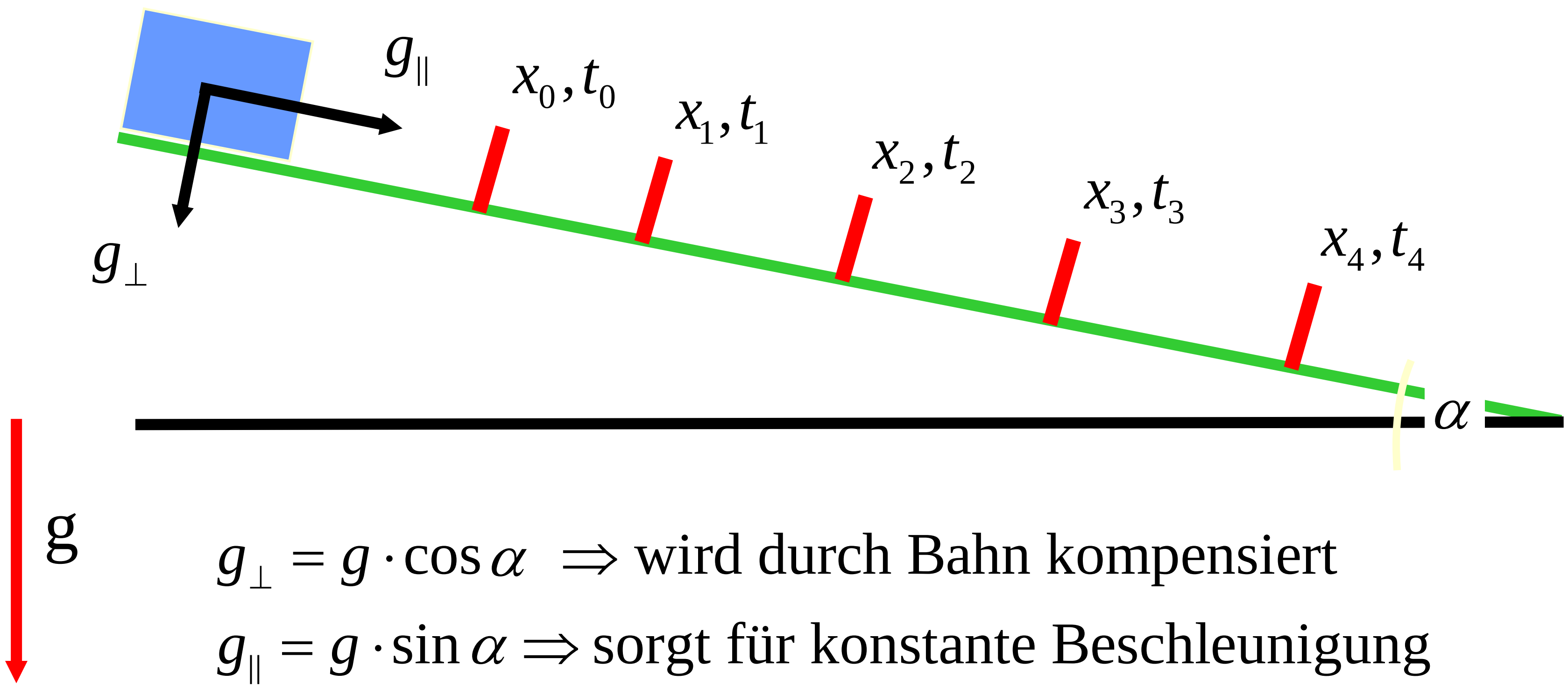
- Die lineare Regression ist eine wichtige Methode! Sie liefert die sog. Ausgleichsgerade.

- Wir beschaffen uns zunächst einen „Satz“ von Messwerten →

Demo: Bestimmung von Durchschnittsgeschwindigkeiten an der geneigten Luftkissenbahn!

Lineare Regression

Wir wählen dazu die folgende Anordnung:



$g_{\perp} = g \cdot \cos\alpha \Rightarrow$ wird durch Bahn kompensiert

$g_{\|} = g \cdot \sin\alpha \Rightarrow$ sorgt für konstante Beschleunigung

Lineare Regression

- Für die jeweiligen Weg-Intervalle können Durchschnittsgeschwindigkeiten aus den Messwerten bestimmt werden:

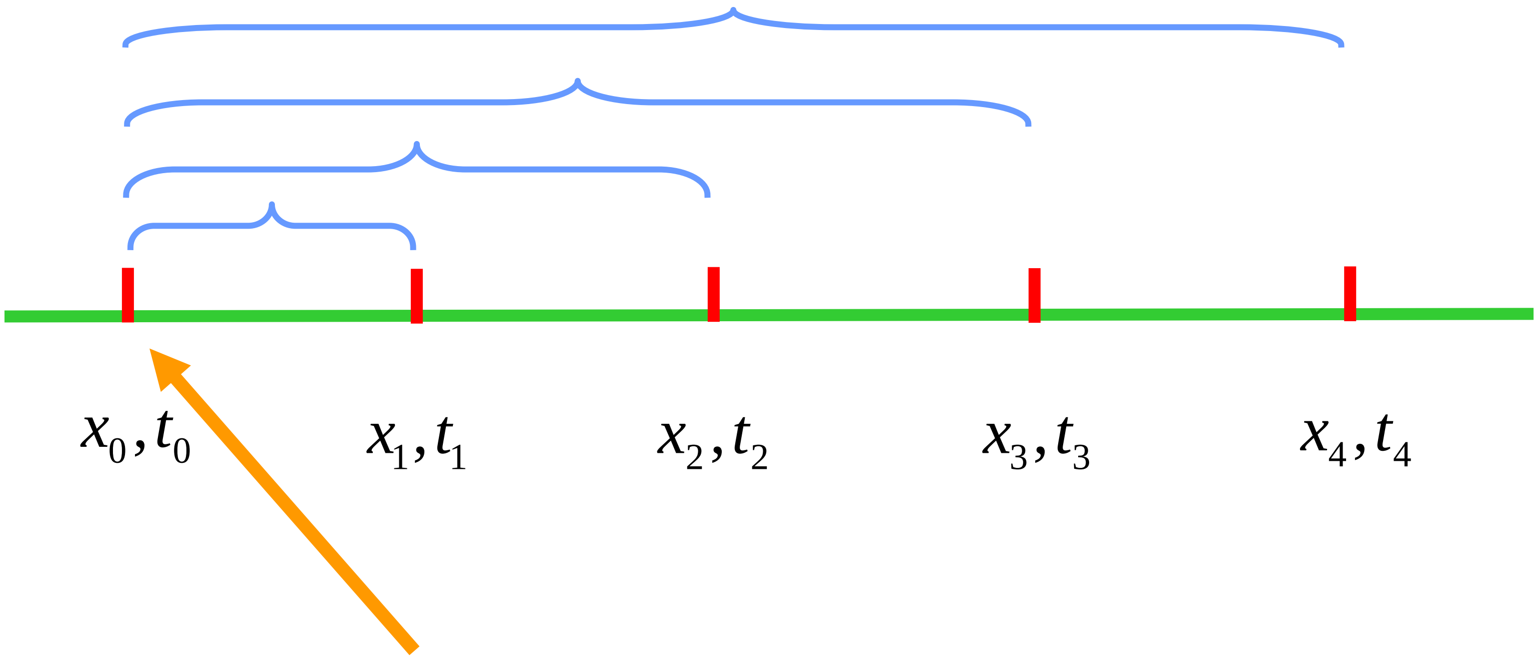
$$\langle v_{ij} \rangle = \frac{x_j - x_i}{t_j - t_i}$$

- Wir beschränken uns hier auf:

$$\langle v_{0j} \rangle = \frac{x_j - x_0}{t_j - t_0} \text{ mit } j = 1, 2, 3, 4$$

Lineare Regression

- Was bedeutet das für unser Experiment?



Position i = 0 ist sogenannter Fixpunkt

Lineare Regression

- Die Theorie liefert den Zusammenhang:

$$\left\langle v_{ij} \right\rangle = \frac{1}{2} a \cdot (t_i + t_j) + v_0$$

(Diesen Ausdruck im Protokoll bitte herleiten!)

- Dies ist ein linearer Zusammenhang!
- Wir überprüfen dies in einem linearen v(t)-Diagramm.

Wir führen zunächst die Messung durch!

Lineare Regression

- **Frage**: Wie „zieht“ man eine Ausgleichsgerade? Hier hilft die lineare Regression!
- Wir setzen für die Durchschnittsgeschwin-digkeiten an:

$$\langle v_{0j} \rangle = C + B \cdot t_j$$

- **Aufgabe**: Bestimme die Konstanten C und B derart, dass die Summe der Abweichungen zwischen Gerade und Messwerten minimal wird!

Lineare Regression

- Als Maß für den Fehler nehmen wir die „Varianz“: $\left(\langle v_{0j}\rangle - C - B\cdot t_j\right)^2$

- Wir bilden die „Fehlersumme“: $S = \sum_{j=1}^{4}\left(\langle v_{0j}\rangle - C - B\cdot t_j\right)^2$

- Fehlersumme soll Minimum annehmen, also: $\frac{\partial S}{\partial C} = 0 \text{ und } \frac{\partial S}{\partial B} = 0$

Lineare Regression

- Man erhält schließlich:

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{4} \langle v_{0j} \rangle \cdot \sum t_j^2 - \sum t_j \cdot \sum t_j \langle v_{0j} \rangle}{4 \cdot \sum t_j^2 - \left(\sum t_j \right)^2}$$

$$B = \frac{4 \cdot \sum_{j=1}^{4} t_j \langle v_{0j} \rangle - \sum t_j \cdot \sum \langle v_{0j} \rangle}{4 \cdot \sum t_j^2 - \left(\sum t_j \right)^2}$$

Aufgabenstellung zur Auswertung des Demo-Versuchs

- Berechnen Sie aus den Messwerten zunächst die 2 Sätze von Durchschnittsgeschwindigkeiten $\langle v_{0j} \rangle$ und $\langle v_{i4} \rangle$
- Zeichnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten und die Ausgleichsgraden (lineare Regression!) in ein lineares Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeiten am Anfang und am Ende der Messstrecke durch Extrapolation.
- Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf Erfolge, Fehler und Unzulänglichkeiten.

Fehlerangabe bei Messergebnissen

- Aufgabe der Fehlerrechnung ist die Bestimmung des Fehlers: $\Delta x = \Delta x_{system.} + \Delta x_{streu.}$

- Ergebnis einer Messung: $\bar{x} \pm \Delta x$

- Man erwartet den wahren Wert x_w im Bereich: $\bar{x} - \Delta x$ bis $\bar{x} + \Delta x$

Fehlerangabe bei Messergebnissen

Δx heißt **absoluter Fehler** von *x*

Δx/x heißt **relativer Fehler**

Endangabe von Messergebnissen:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

und

$$x = \overline{x} \pm \frac{\Delta x}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

Fehlerangabe bei Messergebnissen

- Zurück zur Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

- $\boldsymbol{\sigma}$ charakterisiert die Genauigkeit einer einzelnen Messung und liefert die Genauigkeit des Messverfahrens!

$$x_{neu} \pm \sigma$$

Fehlerangabe bei Messergebnissen

- Je mehr Einzelmessungen, desto „genauer“ ist der Mittelwert:

$$\Delta x_{streu.} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dies ist die sog.

Standardabweichung des Mittelwertes!

Fehlerangabe bei Messergebnissen

- Wenn nur statistische Fehler vorliegen, liegt der wahre Wert x_w mit einer Wahrscheinlichkeit $P_S \approx 68\%$ im Intervall:

$$\bar{x} \pm \Delta x_{streu.}$$

Dies führt zur Definition des sog. **Vertrauensbereichs**:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq x_W \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Fehlerfortpflanzung

- Ergebnis hängt oft von mehreren Messgrößen ab:

$$z = f(a, b, c, \ldots)$$

- Direkt gemessene Größen sind stets mit Fehler behaftet. Wir definieren den Bestwert in diesem Fall als:

$$\overline{z} = f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots)$$

Fehlerfortpflanzung

- Fehler des Ergebnisses Δz hängt von Fehlern der einzelnen Messgrößen (Δa, Δb,…) ab:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \ldots}$$

- Der sog. Größtfehler lautet:

$$\Delta z_g = \left(\left|\frac{\partial z}{\partial a}\right|\right)\Delta a + \left(\left|\frac{\partial z}{\partial b}\right|\right)\Delta b + \ldots$$

Fehlerfortpflanzung

1. Beispiel: $z = f(a,b) = Ka - b$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a} = K \text{ und } \frac{\partial f}{\partial b} = -1$$

$$\Rightarrow \Delta z = \sqrt{K^2 \Delta a^2 + \Delta b^2}$$

$$\Rightarrow \Delta z_g = K \Delta a + \Delta b$$

Fehlerfortpflanzung

2. Beispiel: $z = f(a,b) = Ka^m b^{-n}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a} = Kma^{m-1}\mathrm{b}^{-n} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}} \text{ und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = Ka^m(-n)b^{-n-1} = (-n)\frac{z}{b}$$

$$\Rightarrow \Delta z_g = \left|\frac{mz}{a}\right|\Delta a + \left|\frac{-nz}{b}\right|\Delta b$$

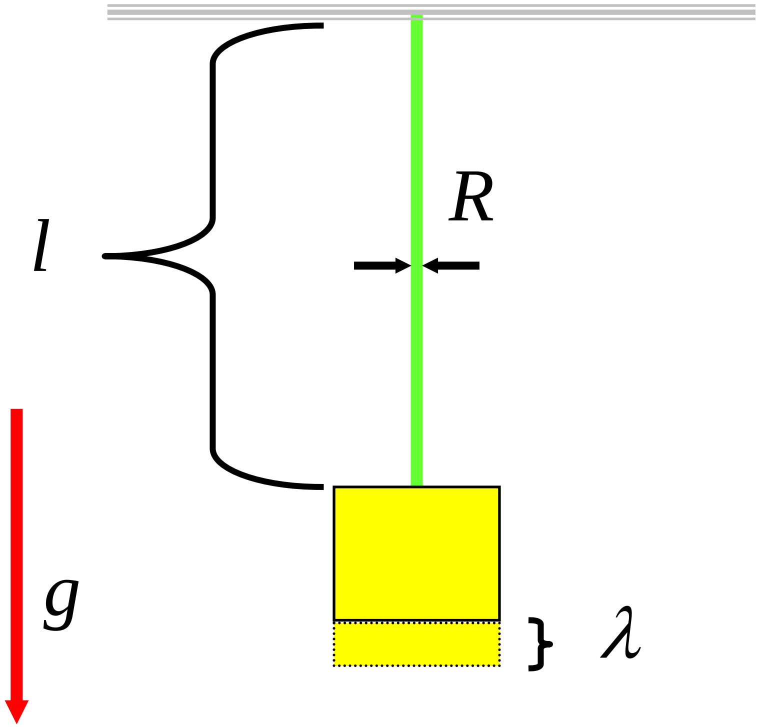
$$\Rightarrow \frac{\Delta z_g}{z} = m\frac{\Delta a}{a} + n\frac{\Delta b}{b}$$

Fehlerfortpflanzung

Anwendung:

$$\text{Dehnung} = \lambda = \frac{l}{E\pi R^2} \cdot F_g$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta F_g}{F_g}$$



Signifikante Stellen

- Sei Δx Schätzwert für Unsicherheit. Δx darf nicht mit zu hoher Genauigkeit angeben werden.

z.B. bei Messung der Erdbeschleunigung …

$$\mathbf{g_{mess} = (9{,}82 \pm 0{,}03385)\ m/s^2}$$

Dies macht offensichtlich keinen Sinn!

Signifikante Stellen

1. **Regel:** Im Praktikum sollten Messunsicherheiten auf <u>eine</u> signifikante Stelle gerundet werden.

Für unser Beispiel folgt damit…

$$\mathbf{g_{mess} = (9{,}82 \pm 0{,}03)\ m/s^2}$$

Signifikante Stellen

Ausnahme von Regel 1: Wenn an führender Stelle der Messunsicherheit eine 1 oder 2 steht, sollten 2 signifikante Stellen angegeben werden.

Beispiel: $\boldsymbol{\Delta x = 0{,}14}$ $\boldsymbol{0{,}1}$

Dies entspricht einer Änderung von bereits 40%!

Signifikante Stellen

2. Regel: Bei Angabe von Messergebnissen sollte die letzte signifikante Stelle des Bestwerts dieselbe Größenordnung haben (= an der gleichen Dezimalstelle stehen) wie die Messunsicherheit.

Beispiele: $\mathbf{x_{best} = 92{,}81}$

mit $\Delta x = 0{,}3$ → $\mathbf{x = 92{,}8 \pm 0{,}3}$

mit $\Delta x = 3$ → $\mathbf{x = 93 \pm 3}$

mit $\Delta x = 30$ → $\mathbf{x = 90 \pm 30}$

Literatur

- Eichler, Kronfeld, Sahm – Das neue Physikalische Praktikum (Kapitel 1)

Was bleibt noch übrig?!

Viel Spaß im Physikalischen Praktikum!