

Jan Kuhfeld, Noemi Roggero, Jonas Linzen, Alexander Kloos
 Betreuer: Fabian Scholten

FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

Einführung

Ein Duffing Oszillator ist ein System, das durch die DGL

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

beschrieben wird. Es handelt sich um einen getriebenen, gedämpften Oszillator mit einem kubischen Störterm βx^3 . Für bestimmte Werte der Parameter tritt chaotisches Verhalten auf. Chaotisch bedeutet, dass eine minimale Änderung der Anfangsbedingungen große Auswirkungen auf das System hat. Da es sich um ein nichtlineares System handelt, ist die DGL nicht geschlossen lösbar. Man muss also auf numerische Simulationen oder Näherungen zurückgreifen.

Die Energie des Systems erhält man, wenn man die DGL für $\delta=0$ und $\gamma=0$ mit \dot{x} erweitert und anschließend integriert:

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{4} \beta x^4 = \text{const}$$

Somit erhält man für unterschiedliche Vorzeichen von α unterschiedliche Potentialformen (s. Abb. 1).

Die Gleichgewichtspunkte liegen für $\alpha > 0$ bei $x_0 = 0$ und für $\alpha < 0$ zusätzlich bei $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$, wobei es sich im zweiten Fall bei $x=0$ um ein instabiles Gleichgewicht handelt.

Der zum Duffing-Oszillator gehörige Attraktor im Phasenraum ist in Abb. 2 dargestellt. Die Bahn kreist dabei unberechenbar um 2 Zentren, anstatt eine Ellipse zu bilden (harmonischer Oszillator).

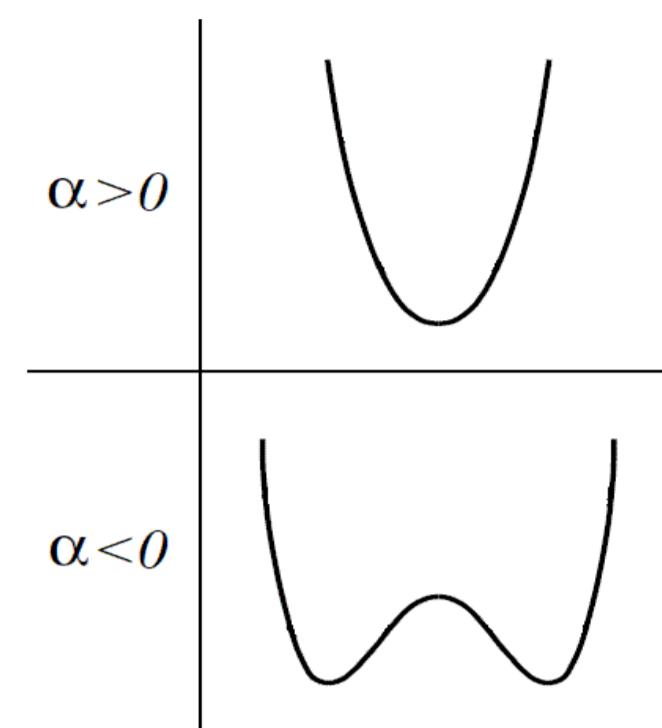


Abb. 1: Potential des Duffing-Oszillators.

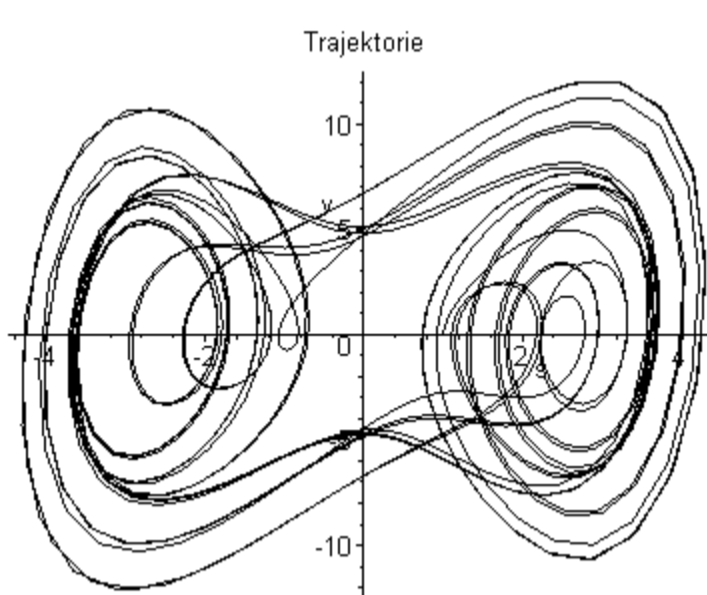


Abb. 2: Phasenraum des Duffing-Oszillators mit seltsamen Attraktor.

Numerische Simulation

Zur numerischen Simulation wird hier ein Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung verwendet. So werden die zeitliche Entwicklung, der Phasenraum und eine Animation erstellt. Ein Beispiel für die Parameter $\alpha = -1, \delta = 0,25, \beta = 1, \gamma = 0,7, \omega = 1,4$ ist in Abb. 3 zu sehen. Eine dynamische Simulation mit diesen Parametern kann über den QR-Code abgerufen werden.

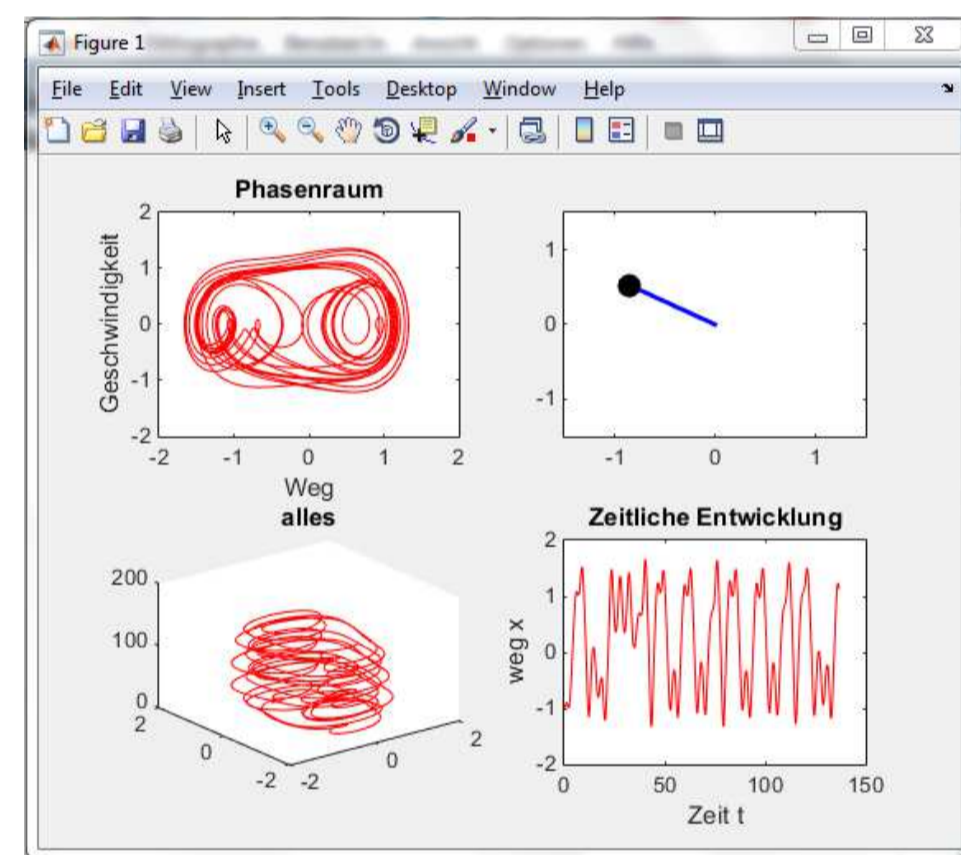


Abb. 3: Chaotische Bahn in Matlab.



Hier geht es zur animierten Simulation

Störungsrechnung

Um sich dem Problem analytisch zu nähern, wurde die ungetriebene DGL ohne Reibung mithilfe der Störungsrechnung untersucht. Dazu wird ein Störparameter ϵ in die DGL eingefügt:

$$\ddot{x} + \alpha x + \epsilon \beta x^3 = 0$$

$x(t)$ wird nun als Funktionenreihe genähert ($x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$). Um die einzelnen Glieder der Reihe zu ermitteln, wird $x(t)$ in die DGL eingesetzt und man erhält per Koeffizientenvergleich ein Gleichungssystem für x_0, x_1, \dots .

Die normale Störungsrechnung führt hier jedoch nicht zum Ziel, da die aus ihr gewonnene Lösung bereits in erster Ordnung einen säkularen Term enthält. Deswegen muss die Linstedt-Poincaré-Methode verwendet werden. Dabei wird die Größe $\tau = \omega t$ eingeführt, wobei ω wie $x(t)$ als Reihe genähert wird: $\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \dots$, wobei ω_0 die Schwingungsfrequenz des ungestörten Problems ist. Dieser Ansatz liefert als Lösung:

$$x(t) \approx \left(A - \frac{\beta A^3}{32\alpha} \right) \cos \left[\left(\sqrt{\alpha + \frac{3\beta A^2}{8\sqrt{\alpha}}} \right) t \right] + \frac{\beta A^3}{32\alpha} \cos \left[3 \left(\sqrt{\alpha + \frac{3\beta A^2}{8\sqrt{\alpha}}} \right) t \right]$$

Der Vergleich mit der Simulation zeigt, dass diese Näherung für kleine β recht genau ist: Mit den Parametern $A=1$ und $\alpha=1$, ergibt sich nach 100s ein absoluter Fehler von 0,08. Wenn β jedoch nicht klein gegen 1 ist, weicht die Näherung bereits nach wenigen Sekunden stark von der numerisch berechneten Kurve ab, wie man leicht an Abb. 4 und Abb. 5 erkennen kann.

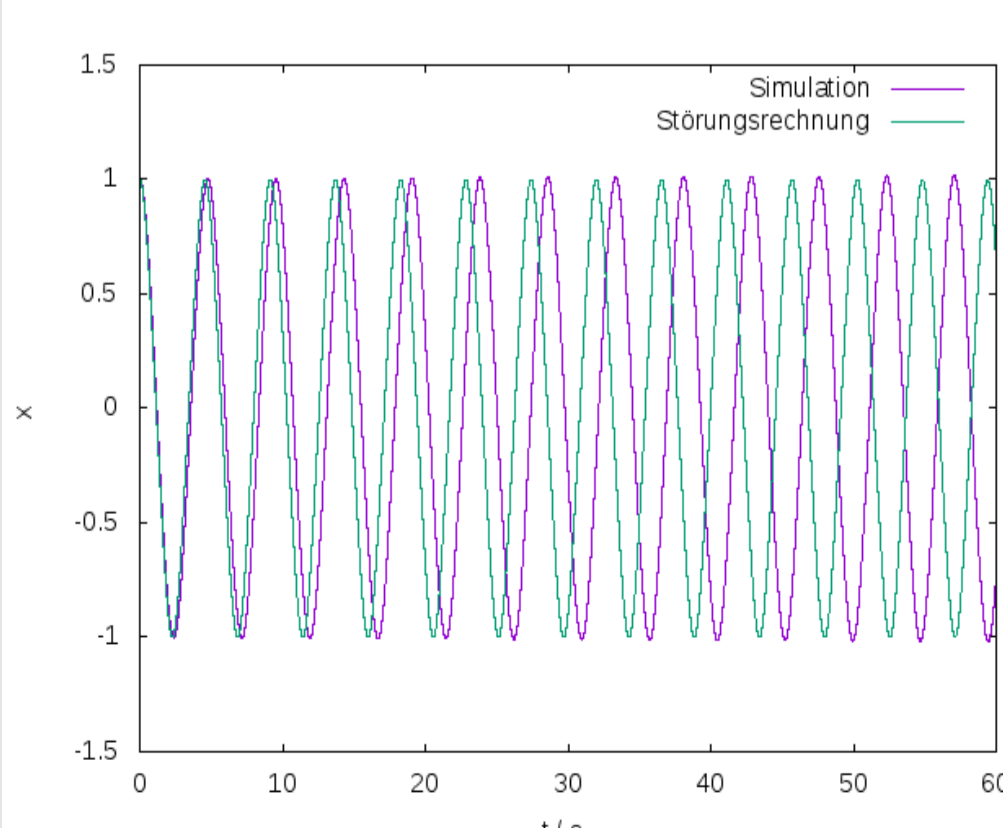


Abb. 4: Auslenkung laut Simulation und Störungsrechnung für die Parameter $A=1, \alpha=1$ und $\beta=1$

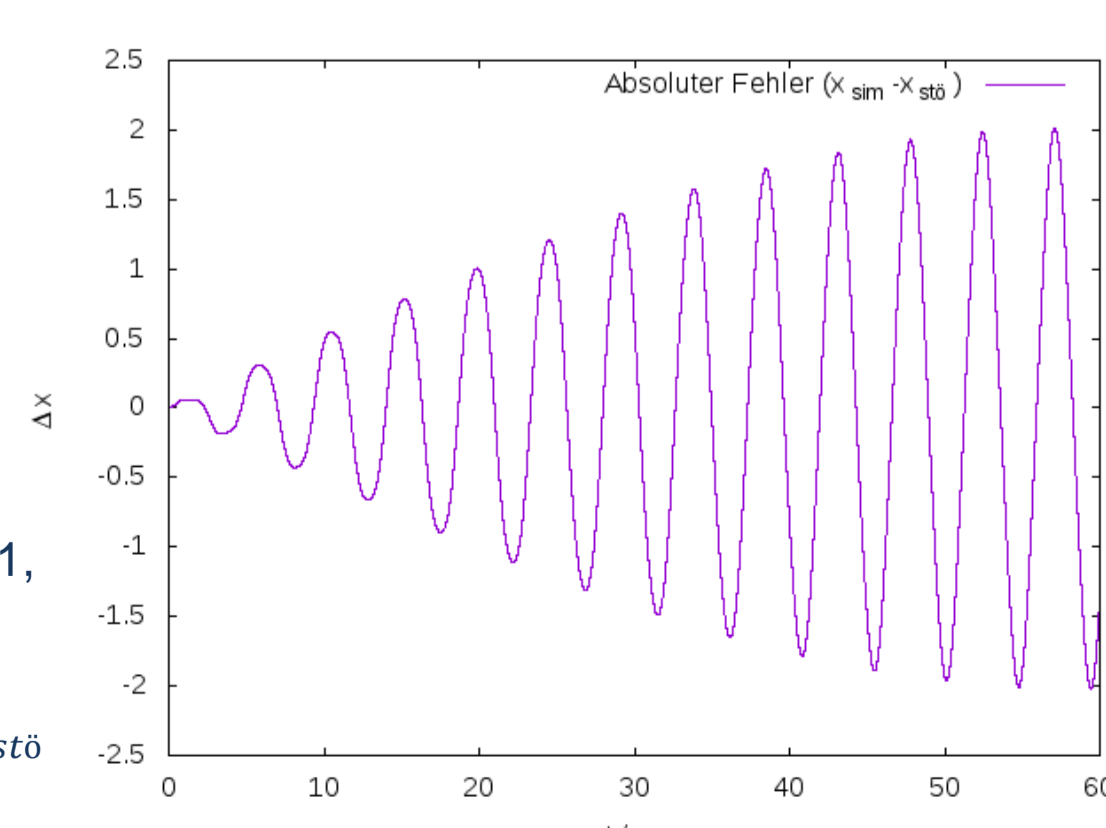


Abb. 5: Absoluter Fehler für die Parameter $A=1, \alpha=1$ und $\beta=1$, berechnet mit $\Delta x = x_{sim} - x_{sto}$

Referenzen

- [1] Siegmund Brandt, Hans Dieter Dahmen, *Mechanik - Eine Einführung in Experiment und Theorie*, Springer Verlag
- [2] H.J. Korsch, *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, Binomi Verlag 2007
- [3] Tamas Kalmar-Nagy, Balakumar Balachandran, *Forced harmonic vibration of a Duffing oscillator with linear viscous damping*
- [4] Carl M. Bender, Steven A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*

Experimenteller Aufbau

Um die Schwingung in der Realität zu simulieren wurde folgender Aufbau konstruiert. Ein dünnes Stahlblatt, verbunden mit zwei gleichen Federn, wird mit einem Sinus-Motor angetrieben. Oben am Stahlblatt werden zwei gleiche magnetische Gewichte angebracht. Mit einer Kamera werden die Schwingungen bei verschiedenen Parametern (Variation der Masse und der Frequenz) aufgenommen. Mithilfe des roten Punktes kann ein Trackingprogramm (Viana.NET 5.0) die Schwingungsamplituden und Phasendiagramme auswerten.

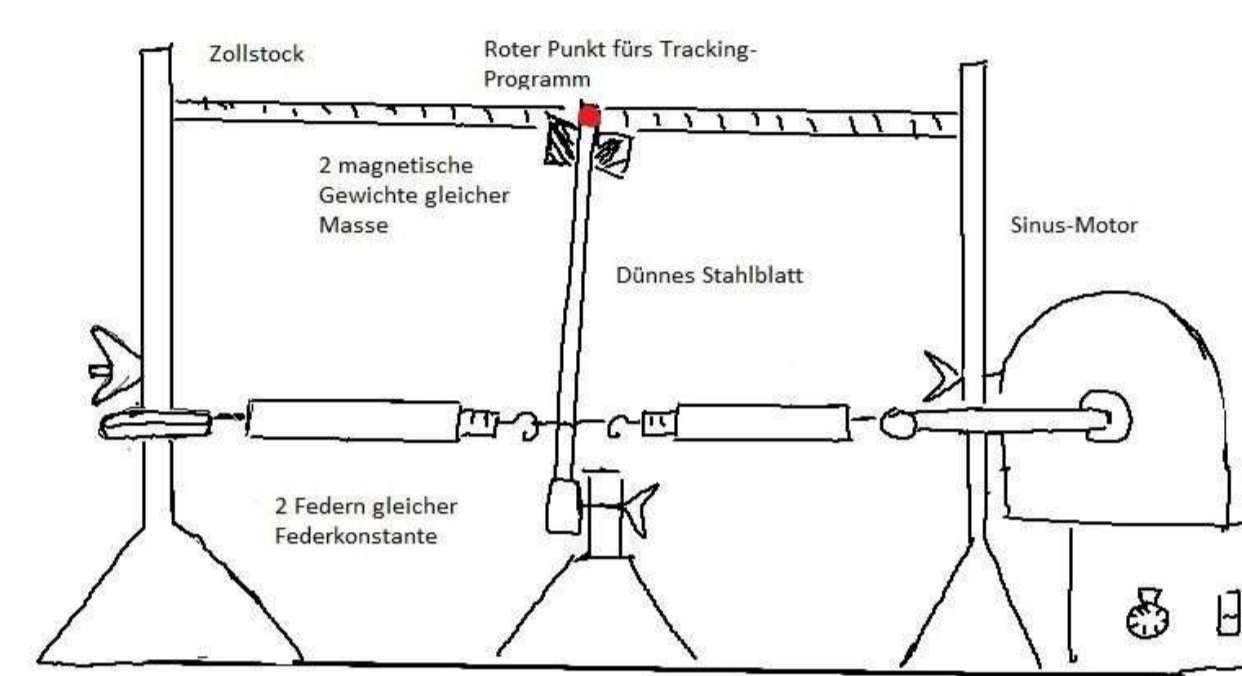


Abb. 6: Skizze vom Versuchsaufbau.



Abb. 7: Foto vom realisierten Aufbau.

Vergleich Experiment-Simulation

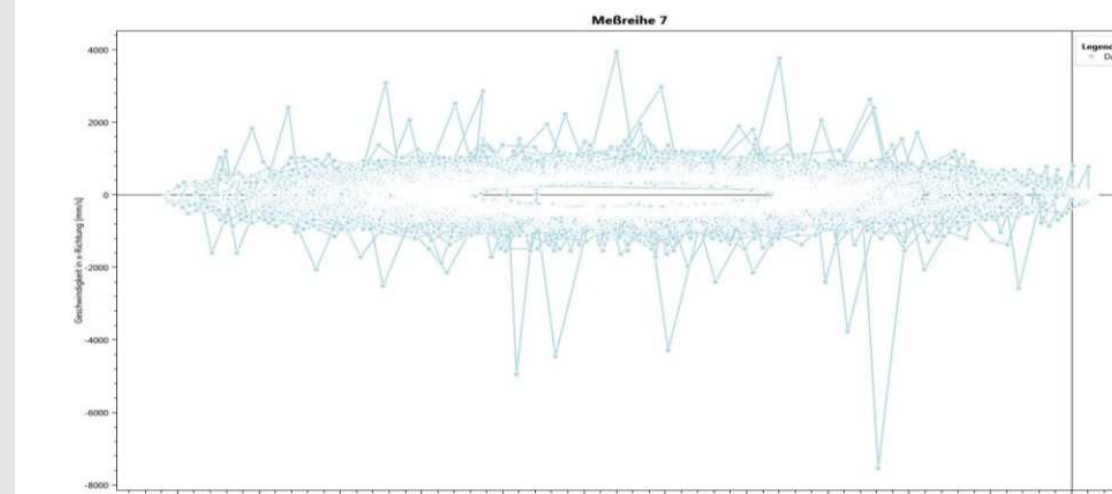


Abb. 8a: Phasenraum bei $m \approx 4g$, kein Antrieb

Ungetrieben annähernd harmonischer Oszillator

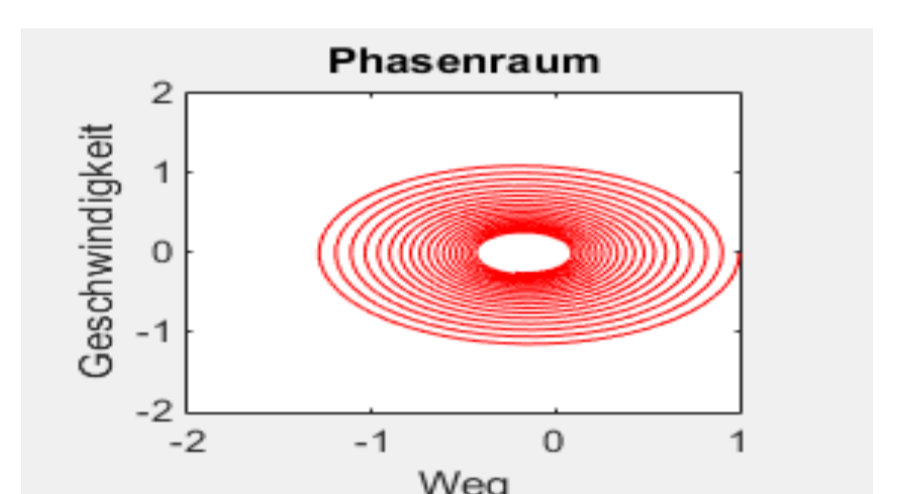


Abb. 8b: Phasenraum für $\alpha = 1, \beta = 0, \delta = 0,01, \gamma = 0, \omega = 0$

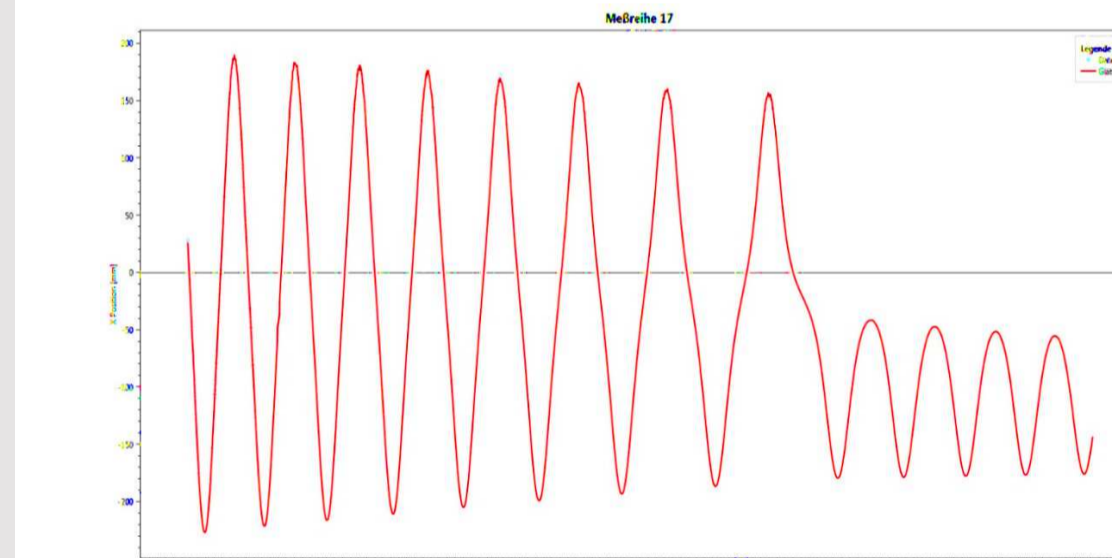


Abb. 9a: Bahn mit $m \approx 22g$, kein Antrieb

Nachweis vom Duffing-Potential

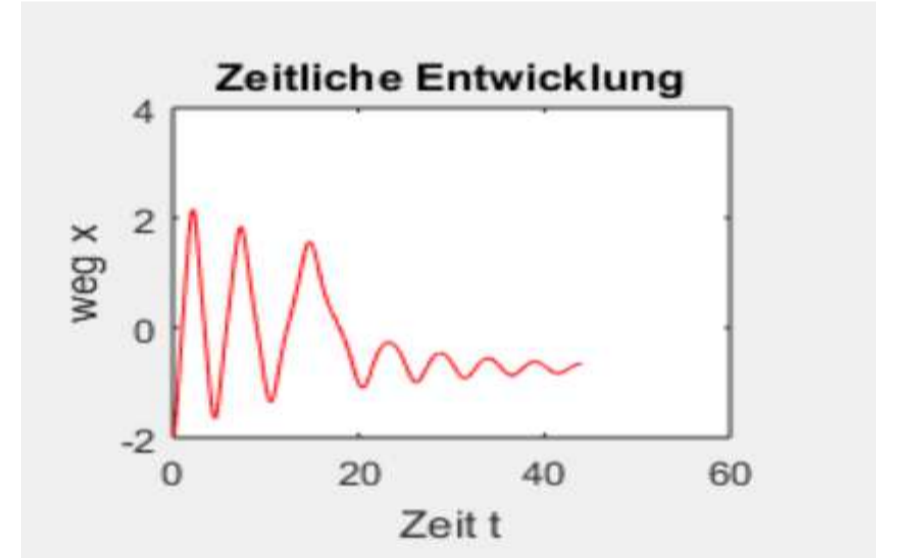


Abb. 9b: $\alpha = -1, \beta = 1, \delta = 0,09, \gamma = 0, \omega = 0$

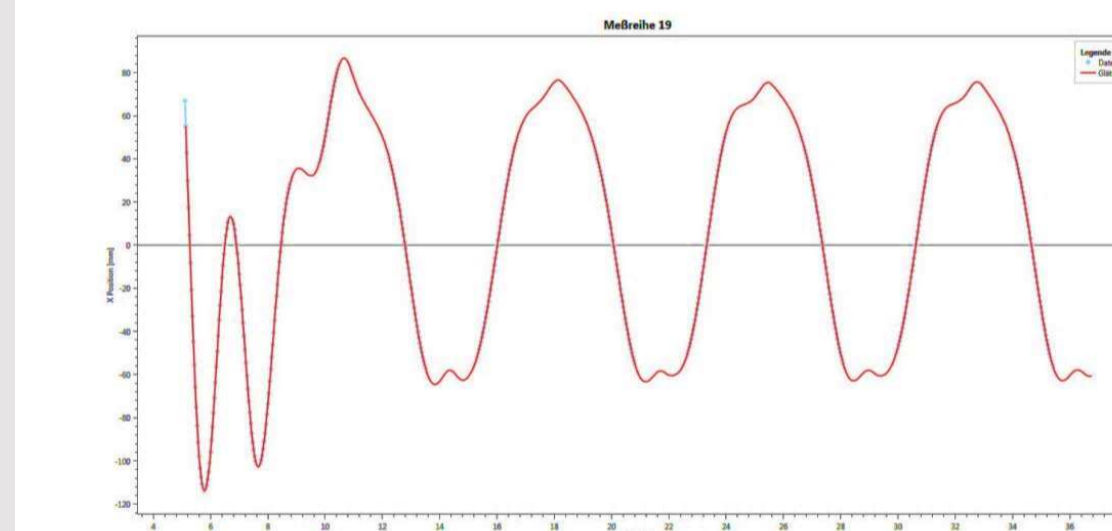


Abb. 10a: Bahn mit $m \approx 22g$, Frequenz= $0,137s^{-1}$

Angetriebener Oszillator



Abb. 10b: Phasenraum für $\alpha = -1, \beta = 1, \delta = 0,25, \gamma = 0,65, \omega = 1,4$

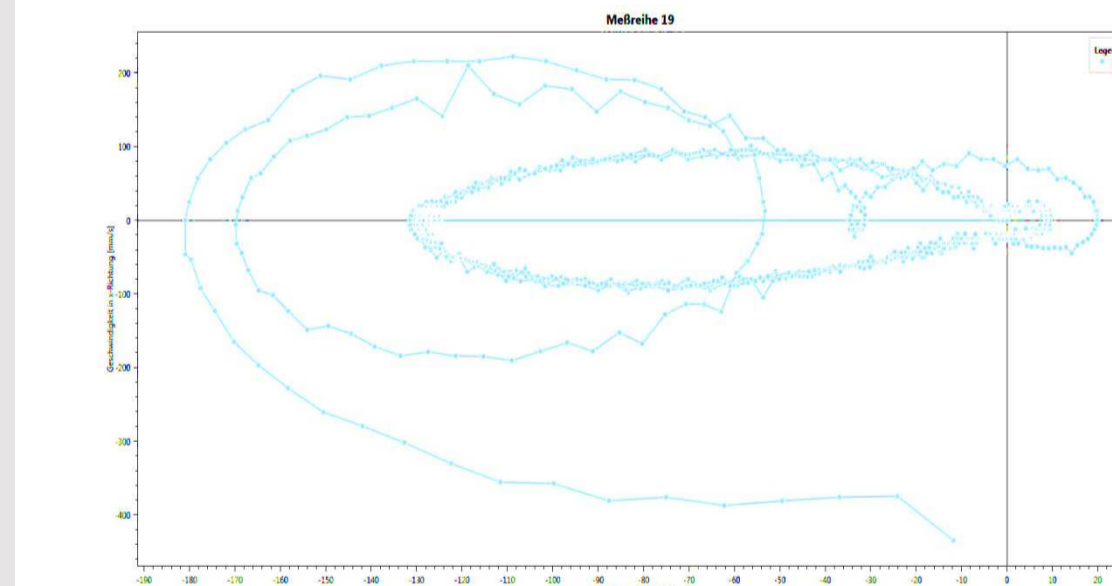


Abb. 11a: Phasenraum aus 10a.

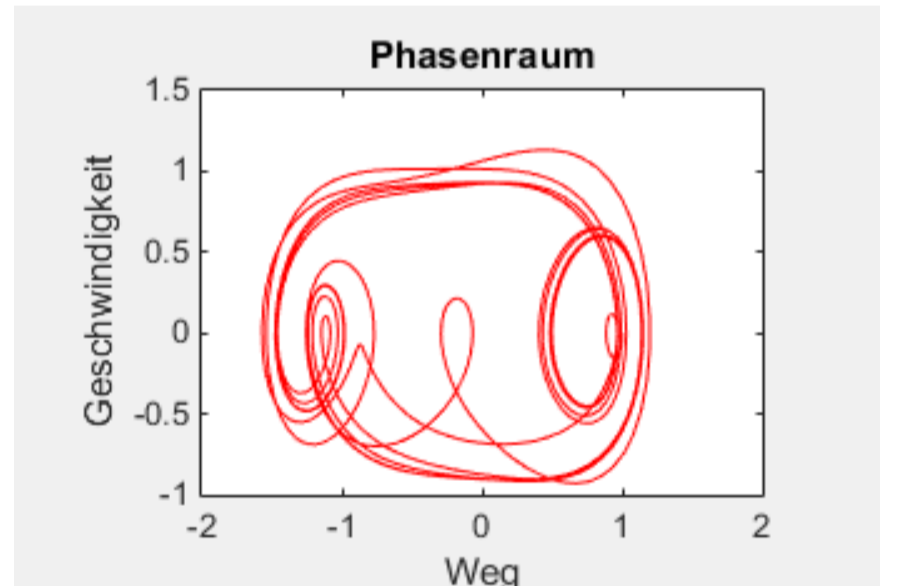


Abb. 11b: Phasenraum aus 10b.

Der Versuchsaufbau zeigt nur bei hohen Gewichten und kleinen Erregerfrequenzen eine Abweichung von einem normalen harmonischen Oszillator. In Abb. 9a erkennt man gut die zwei Potentialtöpfe, wobei nach einiger Zeit die Masse in einen von beiden „hineinfällt“.

In Diagramm 10a sind größere Differenzen an den Maxima und Minima zu erkennen, die wie chaotisches Verhalten aussehen. Auch der zugehörige Phasenraum in Abb. 11a deutet Chaos an; man sieht nämlich 3 umkreisten Zentren, eines pro Ruhelage. Dies ist anschaulicher in der Simulation (S. Abb. 11b).

Zusammenfassung

Die Simulation funktioniert sehr gut und liefert die erwarteten Ergebnisse (im Phasenraum eine Ellipse für den harmonischen Oszillator, den seltsamen Attraktor für Chaos).

Die Störungsrechnung lässt sich damit gut vergleichen für $\alpha > 0$ und $\beta < 1$.

In dem Experiment ist uns leider nicht gelungen, das Chaos zu reproduzieren. Das liegt daran, dass der Parameter γ (abhängig von der Amplitude des Sinus-Motors) nicht einstellen ließ.

Außerdem gab es im Aufbau Störfaktoren wie unregelmäßige Elastizität des Stahlblattes und Reibung durch die Kopplung zwischen Stahlblatt, Federn und Motor.

Es ist aber in Abb. 8a zu sehen, dass wir die Form des Potentials für $\alpha < 0$ reproduzieren konnten.

In Abb. 10a und 10b deutet sich Chaos an, aber das Ziel wurde nicht ganz erreicht weil die Bahn trotz Unregelmäßigkeiten auf Dauer periodisch ist.

In einigen Fällen lassen sich Experiment und Simulation ziemlich gut vergleichen.

Danksagungen

- An Herrn T. Domanski und Herrn K. Ulrich für ihre Hilfsbereitschaft bei unseren technischen Problemen.
- An Herrn Dr. Dreher für seine Ratschläge beim Erstellen der Simulation.
- An Fabian Scholten für seine aufopferungsvolle Hingabe.

Kontakt

noemi.roggero@rub.de
 jonas.linzen@rub.de
 alexander.kloos@rub.de
 jan.kuhfeld@rub.de