

## Thema 5: Linsengesetze, Augenlinsenmodell

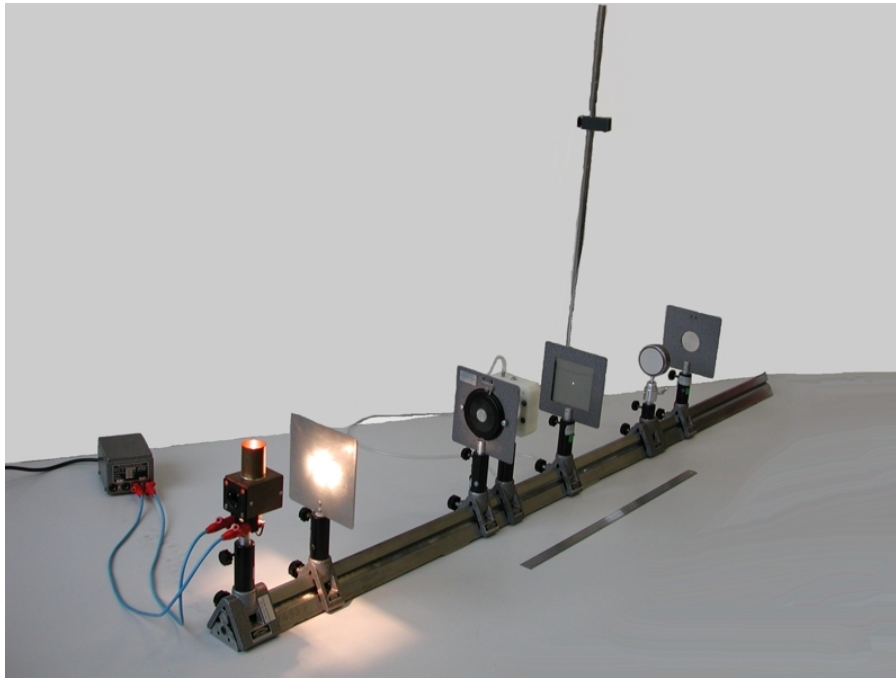


Abbildung 5.1: Der Versuchsaufbau

### 1 Einführung

Optische Linsen sind transparente Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen (meist ungefähr in Form einer Kugelfläche), in denen das Licht eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  hat als im umgebenden Medium.

Die Symmetrieachse der Linse, gleichzeitig die Verbindungslinie der Scheitelpunkte der Kugelkalotten, heißt optische Achse. An beiden Linsenoberflächen außerhalb der optischen Achse wird das Licht gebrochen. Man unterscheidet (s. Abb. 5.2 a und b):

- **Sammel- oder Konvexlinsen:** Sie konzentrieren ein einfallendes paralleles Strahlenbündel monochromatischen Lichts in einen Brennpunkt.
- **Zerstreuungs- oder Konkavlinsen:** Sie zerstreuen ein paralleles Lichtbündel derart, dass es von einem virtuellen Brennpunkt auf der Lichteinfallseite der Linse herzukommen scheint.

Sammellinsen sind am Rande dünner als in der Mitte, daher die Bezeichnung Konvexlinse. Zerstreuungslinsen sind am Rande dicker als in der Mitte, daher der Name Konkavlinse. Der Abstand des Brennpunktes vom Linsenmittelpunkt heißt Brennweite  $f$ .

Für Sammellinsen wird die Brennweite positiv:  $f_{\text{Konvexlinse}} > 0$

Für Zerstreuungslinsen wird die Brennweite negativ:  $f_{\text{Konkavlinse}} < 0$

Die senkrecht zur optischen Achse liegende Brennebene ist der Ort aller Brennpunkte, in denen parallel oder schief zur optischen Achse einfallende parallele Lichtbündel fokussiert werden. Sie ist nur annähernd (für kleine Winkel zur optischen Achse) eine Ebene.

Man unterscheidet dicke und dünne Linsen. Falls die Oberflächen dünner Linsen Kugelkalotten darstellen, werden die optischen Eigenschaften für achснаhe Strahlen durch einfache Abbildungsgleichungen beschrieben. Die Strahlengangsberechnung für dicke Linsen oder Linsen, deren Oberflächen keine Kugelschalen sind, erfordert i.A. den Einsatz von Großrechnern.

Das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0$  des Lichts im Vakuum zur Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  im Linsenmaterial definiert den

$$\text{Brechungsindex } n = \frac{c_0}{c} \quad (5.1)$$

Der Brechungsindex  $n$  durchsichtiger Substanzen ändert sich substanzcharakteristisch mit der Lichtwellenlänge  $\lambda$ . Diese Erscheinung heißt Dispersion.

Daher muss, streng genommen, zu jeder Brechungsindexangabe für ein optisches Element oder jeder Brennweitenangabe einer Linse die zugehörigen Lichtwellenlänge spezifiziert sein. Es bedeutet, dass mit einfachen Linsen und weißem (also nicht monochromatischem) Licht die Brennweite einer Linse nur unscharf definiert ist! Laserlicht, das ja extrem monochromatisch ist, ist nur deshalb so exakt und fein fokussierbar, weil in diesem Falle die Dispersion keine Rolle spielt!

Bei farblosen durchsichtigen Substanzen wie optischen Gläsern, Wasser, Kochsalz etc. ist die Dispersion über den Bereich des sichtbaren Spektrums ein kleiner Effekt. Für die Bestimmung von Brennweiten unter Praktikumsbedingungen folgt daraus, dass der Einfluss der Farbdispersion auf die Messergebnisse gerade an der Messgenauigkeitsgrenze von  $\pm 1\%$  liegt. Es bringt hier daher keinen Vorteil, monochromatisches anstelle von weißem Licht zu verwenden.

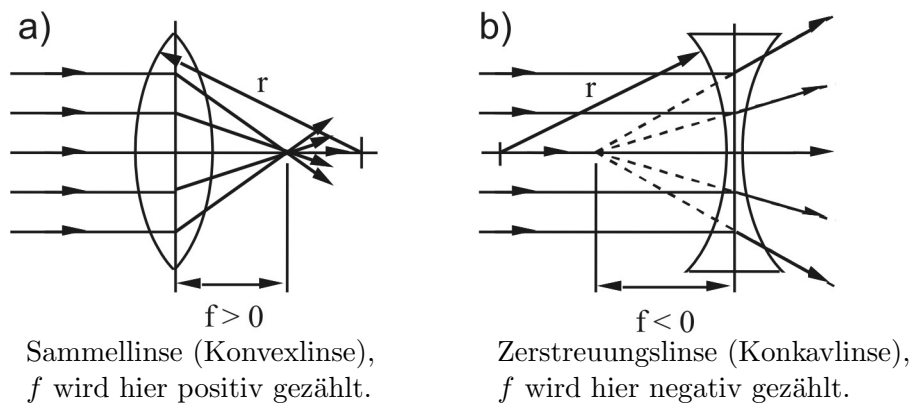


Abbildung 5.2: Hier ist  $r$  der Krümmungsradius der Begrenzungsfläche.

## 2 Geometrische Optik

### 2.1 Bildkonstruktion

So lange die Komponenten eines optischen Systems (Blenden, Spalte, abzubildende Objekte etc.) groß sind gegen die Wellenlänge des verwendeten Lichts, gelten die Regeln der geometrischen Optik (Strahlenoptik).

Im Rahmen der geometrischen Optik kann der Strahlengang durch eine dünne Linse mit Hilfe einfacher Regeln konstruiert werden (s. Abb. 5.3):

1. Der Mittelpunkt- oder Zentralstrahl geht durch den Linsenmittelpunkt und wird nicht abgelenkt. Wegen der endlichen Dicke der Linse erfährt er eine kleine Parallelverschiebung, die aber immer vernachlässigt werden soll. Im Spezialfall des Lichteinfalls parallel zur optischen Achse liegt der Zentralstrahl in der optischen Achse.
2. Der Parallelstrahl fällt parallel zur optischen Achse ein und läuft nach der Brechung in der Linse durch den Brennpunkt. Bei schiefem Einfall des Lichtbündels auf die Linse ist dies ein Strahl parallel zum Zentralstrahl. Alle Parallelstrahlen gehen durch denselben Punkt in der Brennebene.
3. Der Brennstrahl läuft durch den einfallseitigen Brennpunkt und geht nach Brechung in der Linse in einen auslaufenden Parallelstrahl über.

Auf diese Weise - für einen Gegenstand der Größe  $G$  in einem Abstand  $g$  von der Linsenmitte - durchgeführte geometrische Bildkonstruktionen geben zwar die Bildweite  $b$  und die Größe  $B$  des Bildes zutreffend an, zeigen aber nicht das reale Strahlenbündel, das die Abbildung bewirkt.

Dieses reale Strahlenbündel wird durch die Eintritts- bzw. Austrittspupille begrenzt, die entweder durch die Linsenfassung oder z.B. durch eine zusätzliche Irisblende definiert ist.

Die Qualität optischer Instrumente (siehe z.B. Mikroskop oder Fernrohr) wird durch die Größe dieser Eintritts- bzw. Austrittspupille wesentlich bestimmt. Parameter wie Auflösungsvermögen, Bildschärfe, Bildhelligkeit und Kontrast hängen stark von ihr ab (siehe numerische Apertur, sphärische Aberration, Abbildungsfehler von Linsen).

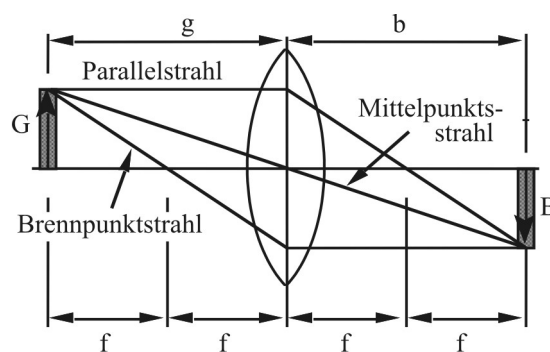


Abbildung 5.3: Bildkonstruktion nach den Regeln der geometrischen Optik. (Skizze für den Spezialfall  $g = 2f$ , siehe auch Gl. 5.4 und Abb. 5.4.)

## 2.2 Linsengleichung

Für eine von Luft umgebene Linse lautet die wohl wichtigste Linsengleichung:

$$D_L = \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (5.2)$$

Hierbei bezeichnet  $D_L$  die sogenannte Brechkraft mit der Einheit  $1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ Dioptrie} = 1 \text{ dpt}$ . (Beispiel: Eine Linse mit einer Brennweite  $f = 0,1 \text{ m}$  besitzt demnach eine Brechkraft von  $D_L = 10 \text{ dpt}$ !) Aus den Strahlensätzen der Geometrie und den Regeln der Bildkonstruktion ergibt sich der

$$\text{Abbildungsmaßstab} = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}} = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{f}{g-f} \quad (5.3)$$

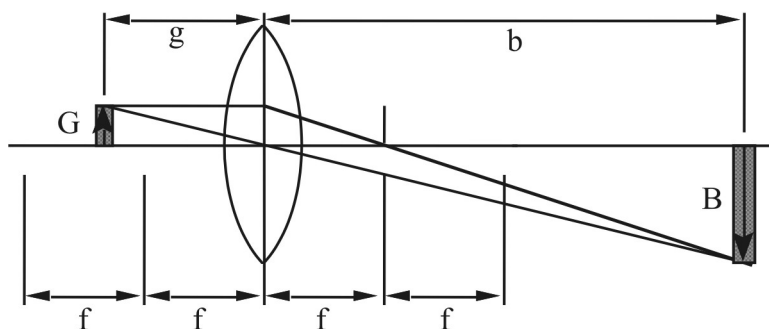


Abbildung 5.4: Abbildung durch eine Sammellinse für  $f < g < 2f$ . Es entsteht ein reelles, vergrößertes ( $B > G$ ) und umgekehrtes Bild im Abstand  $b > 2f$ .

Für  $g > f$  ergibt sich ein reelles Bild, das auf einem Schirm sichtbar gemacht werden kann.

Es ist umgekehrt, und	für $g > 2f$ verkleinert	$(B < G)$ im Bildabstand $f < b < 2f$ ,	(5.4)
	für $g = 2f$ gleich groß	$(B = G)$ im Bildabstand $b = 2f$ ,	
	für $f < g < 2f$ vergrößert	$(B > G)$ im Bildabstand $b > 2f$ .	

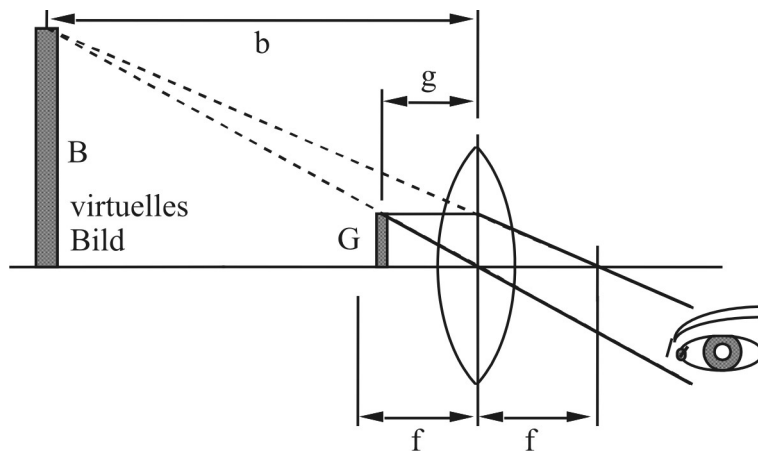


Abbildung 5.5: Abbildung durch eine Sammellinse für  $g < f$ . Es entsteht ein virtuelles, vergrößertes ( $B > G$ ) und aufrechtes Bild, das nur durch zusätzliche Optik (Auge, Kamera) auf einem Schirm (Retina) sichtbar gemacht werden kann.

Der Versuchsaufbau enthält ein mit Flüssigkeit gefülltes Linsenaggregat, bei dem eine Grenzfläche aus einer elastischen durchsichtigen Membran, die andere aus einer konkav-konvexen Sammellinse besteht. Durch Variation des hydrostatischen Drucks  $p$  in der Linsen­kammer kann die Brechkraft dieses Linsenaggregats über einen weiten Bereich geändert werden. Dabei simuliert der hydrostatische Druck die Funktion des Ziliarmuskels der Augenlinse.

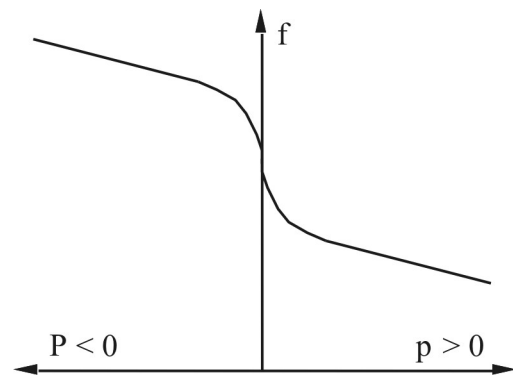


Abbildung 5.6: Schematischer Verlauf der Änderung der Brennweite  $f$  des Augenlinsenmodells<sup>1</sup> als Funktion des hydrostatischen Innendrucks  $p$ .

### 3 Versuchsaufbau (variable Linse des Augenmodells)

Auf der Membranseite des Linsenaggregats ist eine variable Irisblende auf demselben Reiter der optischen Bank montiert. Sie hat zwei Funktionen: sie definiert die Eintrittspupille der Linse und dient als mechanischer Berührungsschutz für die sehr empfindliche elastische Membran!

### 4 Verfahren zur Bestimmung der Brennweite einer Linse

Linsenbrennweiten lassen sich nach mehreren Verfahren bestimmen. Ausmessen der Gegenstands- und Bildweite und Anwendung von Gl. 5.2 wäre naheliegend, hat jedoch das Problem, dass die Lagen der Referenzpunkte, von denen aus  $g$ ,  $b$  und  $f$  zu messen sind, sehr genau bekannt sein müssen. Vor allem der optische Mittelpunkt (Hauptebene) einer Linse oder die Hauptebenen eines Linsensystems sind meist sehr schwierig genau anzugeben, was erhebliche systematische Fehler bei diesem Verfahren verursachen kann.

<sup>1</sup>Im Bereich kleiner Druckdifferenzen zur Umgebung,  $-20 \text{ mm WS} \lesssim \Delta p \lesssim +20 \text{ mm WS}$ , verursachen Inhomogenitäten der elastischen Membran des Augenlinsenmodells einen Bereich schlechter Bildqualität und unklar definierter Brennweite.

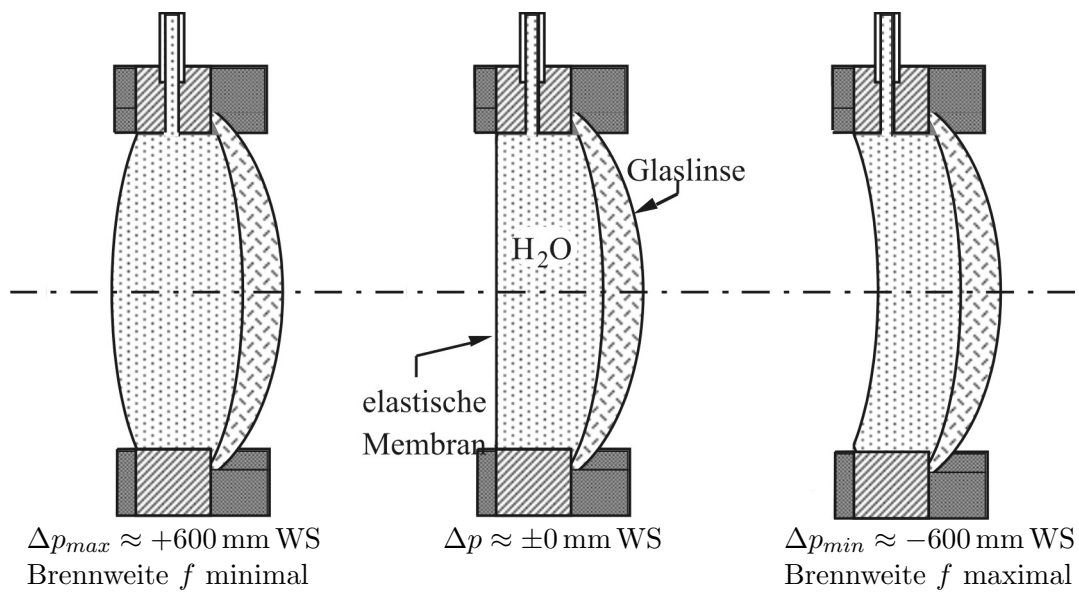


Abbildung 5.7: Augenlinsenmodell: 3 Schemaskizzen für verschiedene Differenzen  $\Delta p$  des inneren hydrostatischen Drucks zum Umgebungsluftdruck (Flüssigkeitsfüllung  $H_2O$  ( $n = 1,33$ ), Druck in mm WS (WS = Wassersäule) angegeben).

#### 4.1 Autokollimationsverfahren

Das Autokollimationsverfahren ist sehr elegant und von guter systematischer Genauigkeit, sofern der Fehler bei der Bestimmung der optischen Hauptebene der Linse klein gehalten werden kann.

- Wie geht dieser Fehler in das Messergebnis ein?

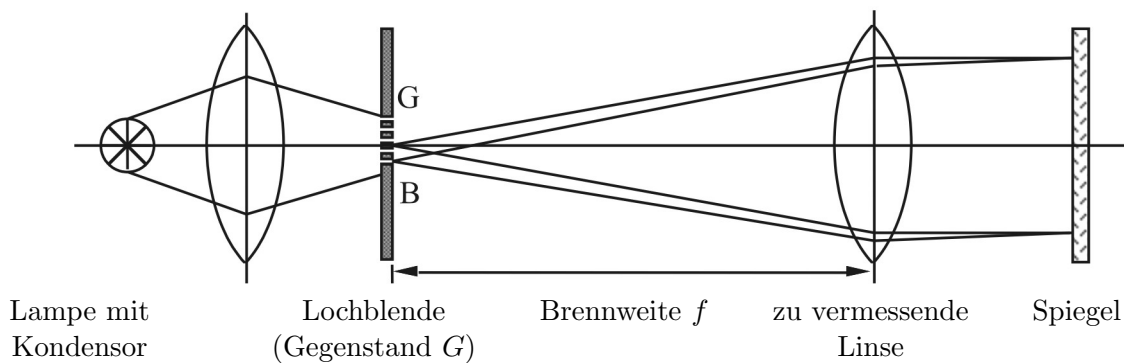


Abbildung 5.8: Aufbauschema zur Brennweitenbestimmung mit Autokollimation.

Bei diesem Verfahren wird ein Planspiegel leicht geneigt gegen die optische Achse hinter der Linse aufgestellt. Befindet sich der Gegenstand gerade im Abstand der Brennweite  $f$  von der Linse, so entsteht ein paralleles Austrittsbündel hinter der zu untersuchenden Linse, und das Bild  $B$  des Gegenstands liegt wieder in der Gegenstandsebene (der besseren Sichtbarkeit wegen leicht seitlich verschoben).

#### 4.2 Bessel-Verfahren

##### 4.2.1 Messaufbau

Ebenso wie das Autokollimationsverfahren, ist das Bessel-Verfahren nur zur Brennweiten-Bestimmung an Linsen oder Linsensystemen geeignet, die ein reelles Bild erzeugen. Will man also die Brennweite einer Zerstreuungslinse messen, muss man sie auch bei diesem Verfahren derart eng mit einer Sammellinse koppeln, dass das System insgesamt als eine Sammellinse wirkt. Bei bekannter Brechkraft

der Sammellinse kann dann aus der gemessenen Brechkraft des Linsensystems die Brennweite der Zerstreuungslinse ermittelt werden.

Das Bessel-Verfahren nutzt aus, dass der Strahlengang in der geometrischen Konstruktion der Abbildung durch eine Linse umkehrbar ist. Für einen Abstand  $a$  zwischen Gegenstand  $G$  und Bild  $B$  gibt es, falls  $a = g + b \geq 4f$  gilt, **immer** ein reelles Bild. Wird die Abstandssumme  $a = g + b > 4f$  festgehalten, so ergeben sich damit zwei Linsenpositionen mit vertauschten Gegenstands- und Bildweiten  $g$  und  $b$ , in denen die Abbildungsbedingungen erfüllt sind.

#### 4.2.2 Numerische Auswertung zum Bessel -Verfahren

Für die **1. Position** gilt:  $g_1 + b_1 = a$ .

Wird nun unter Beibehaltung von  $a$  die Linse so verschoben, dass  $b$  und  $g$  ihre Werte tauschen, so ergibt sich wieder ein scharfes Bild.

Für die **2. Position** gilt:  $g_2 + b_2 = a$ , und – falls die Lage der Hauptebenen der zu messenden Linse ( $\approx$  Linsenmitte) exakt bekannt sind –  $b_2 = g_1$  sowie  $g_2 = b_1$ .

Werden alle Abstandsmessungen auf dieselbe Markierung an der Linse bezogen (als eine willkürlich angenommene fiktive Hauptebenenposition), so hebt sich die Abweichung  $\Delta$  der angenommenen von der wahren Hauptebenenposition nicht nur bei der Abstandssumme  $a$ , sondern auch bei der Linsenpositions-differenz  $d$  heraus (s. Abb. 5.9).

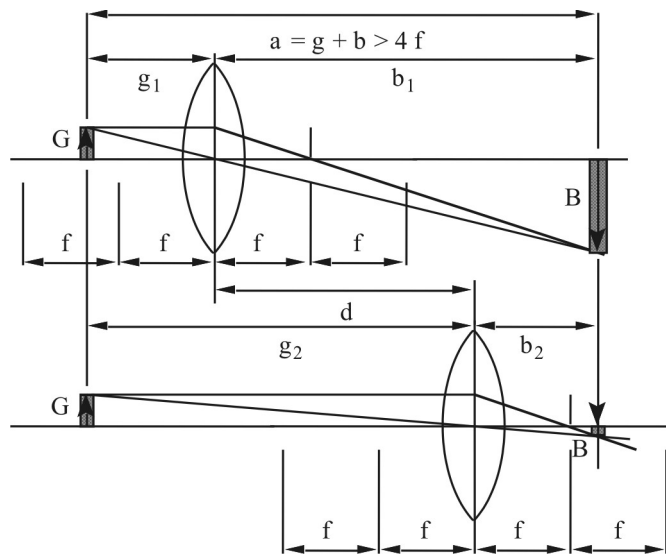


Abbildung 5.9: Brennweitenbestimmung nach dem Bessel-Verfahren

Die Linsenpositionsdifferenz wird daher  $d = g_2 - g_1 = a - 2g_1$ , woraus folgt:

$$g_1 = \frac{a - d}{2} \quad \text{und} \quad b_1 = a - g_1 = \frac{a + d}{2} \quad (5.5)$$

unabhängig von  $\Delta$ ! Aus der Abstandssumme  $a$  und der Differenz der Linsenpositionen  $d$  können somit  $g_1$  und  $b_1$  berechnet werden, ohne dass man die Hauptebene der Linse genau kennt. Gl. 5.5 in 5.2 eingesetzt ergibt

$$\frac{1}{f} = \frac{4a}{(a + d) \cdot (a - d)} \quad \text{und} \quad (5.6)$$

$$f = \frac{a^2 - d^2}{4a} \quad (5.7)$$

Das Bessel-Verfahren mit numerischer Auswertung nach Gl. 5.7 ist daher vor allem für die Brennweitenbestimmung an dicken Linsen oder bei Linsensystemen geeignet, bei denen die Hauptebenenlage

nicht bekannt ist. Sei die oben erwähnte Messmarkierung  $g_{1,exp}$  an der Linse, die als vorerst angenommene Hauptebenenposition der Linse benutzt werden soll, gegenstandsseitig von der wahren Hauptebenenposition  $g_{1,wahr}$  angebracht. Dann gilt für letztere:  $g_{1,wahr} = g_{1,exp} + \Delta$ .

Daraus ergibt sich die Abweichung  $\Delta$  der angenommenen von der wahren Hauptebenenposition aus der Messung als

$$\Delta = \frac{b_{2,exp} - g_{1,exp}}{2} \quad (5.8)$$

## 5 Aufgabenstellung, Versuchsdurchführung

### 5.1 Allgemeine Hinweise

Die Lichtquelle ist eine 35 Watt Halogenglühlampe mit auf maximale Bildhelligkeit justierbarer Kondensorlinse. Die Lichtquelle und eine Blende mit L-förmig angeordneten Bohrlöchern (der „Gegenstand“) sind auf einem gemeinsamen Reiter auf der optischen Bank montiert.

Das Augenlinsenmodell muss blasenfrei mit Flüssigkeit (destilliertes Wasser) gefüllt sein. Es ist über einen Schlauch mit einem Vorratsbehälter verbunden, dessen Höhe relativ zur optischen Achse im Bereich  $\pm 600$  mm durch Verschieben einer Stativklemme variiert werden kann. Die Höhendifferenz der Wasseroberfläche im Behälter zur optischen Achse ergibt den hydrostatischen Druck in der Linsen-kammer in mm Wassersäule (mm WS).

Die Irisblende vor dem Augenlinsenmodell wird zu Beginn vorsichtig auf ca. 20 mm  $\emptyset$  der Pupille eingestellt. Variieren Sie bei jedem Teilversuch mit Hilfe der Irisblende die Größe der Eintrittspupille des Augenlinsenmodells, und beobachten Sie, wie sich die gemessene Brennweite und die Bildqualität dabei ändern! - Gibt es eine optimale Pupillengröße? Wenn ja, durch welche Abbildungseigenschaften könnte man sie definieren?

### Anmerkungen:

Dies ist ein Optik-Versuch, bei dem Sie die Schärfe Ihrer Beobachtungsgabe und Ihr Fingerspitzengefühl bei der Positionsjustierung trainieren können. Güte und Genauigkeit der Resultate hängen erheblich von der Sorgfalt und Geschicklichkeit ab, mit der die Messungen durchgeführt werden. (Geschicklichkeit umfasst hier auch eine intelligente, gut reproduzierbare Wahl der Messmarken für Abstandsmessungen!)

Beziehen Sie Abstandsmessungen auf die zentrale Markierung der Reiter, an denen die Komponenten auf der optischen Bank montiert sind. Die für alle Messungen gleichen Reststrecken, deren Kenntnis zur Berechnung der eigentlich interessierenden Längen nötig ist, sollten Sie zu Beginn sorgfältig bestimmen und nachher zum jeweiligen Einzelmessergebnis dazurechnen.

### 5.2 Versuchsablauf

#### 5.2.1 Brennweite $f$ des Augenlinsenmodells als Funktion des Drucks $p$

Messung von vorläufigen<sup>2</sup> Brennweitewerten  $f_{ak}$  des Augenlinsenmodells als Funktion des hydrostatischen Innendrucks  $p$  unter Verwendung der Autokollimationsmethode.

Vorläufig wird als Referenzpunkt am Linsenmodell die gegenstandsseitige Kante des Augenlinsenmodellreiters gewählt. Der Abstand  $f_{ak}$  dieses Referenzpunkts zum Gegenstand wird bei insgesamt 10 Druckwerten im Bereich von  $+500 \text{ mm WS} \geq p \geq +50 \text{ mm WS}$  und  $-50 \text{ mm WS} \geq p \geq -500 \text{ mm WS}$  nach *sorgfältigem* Scharfeinstellen des Bildes  $B$  gemessen und tabelliert.

---

<sup>2</sup>Vorläufig, weil die genaue Lage der Hauptebene des Augenlinsenmodells noch nicht bekannt ist und diese außerdem zur direkten Ablesung am Maßstab ungünstig liegt.

Sehen Sie in der Messtabelle außer den Spalten für  $p$  und  $f_{ak}$  eine weitere Spalte für die wahre Brennweite  $f$  vor. Sie wird nach der Bestimmung des Abstands  $\Delta$  des Referenzpunkts von der Hauptebene des Augenlinsenmodells im nächsten Versuchsteil **5.2.2** ausgefüllt.

### 5.2.2 Hauptebenenbestimmung nach dem *Bessel*-Verfahren

Nach Einstellung des Linsenbinnendrucks auf z.B. +300 mm WS wird der Spiegel auf der optischen Bank durch eine Mattscheibe ersetzt, die am äußersten Ende der Bank aufgestellt wird. Das Linsenmodell wird verschoben, bis auf der Mattscheibe ein scharfes Bild entsteht.

Nach Messung von Gegenstandsweite  $g_1$  und Bildweite  $b_1$  wird die zweite Linsenposition gesucht, in der ein scharfes Bild auf der Mattscheibe entsteht. Unter Verwendung desselben Referenzpunkts am Linsenreiter wie bei **5.2.1** werden  $g_2$  und  $b_2$  gemessen.

Zur Verbesserung der Genauigkeit wird diese Messung bei insgesamt 4 Abständen  $a$  der Mattscheibe ( $B$ ) von der Lochblende ( $G$ ) durchgeführt.

Sehen Sie in der Messwerttabelle Zeilen für  $a$ ,  $g_1$ ,  $b_1$ ,  $g_2$ ,  $b_2$  und zusätzlich für  $d$ ,  $f$  und  $\Delta$  vor!

Spalten: Messungen #1 bis #4, Mittelwerte dazu.

Mit Gl. 5.7 und 5.8 werden die 4 Werte von  $f$  und  $\Delta$  errechnet und anschließend die Mittelwerte  $\langle f \rangle$  und  $\langle \Delta \rangle$  gebildet ( $\langle f \rangle$  zur Konsistenzprüfung,  $\langle \Delta \rangle$  zur Weiterverwendung).

Nun werden in die Tabelle zu **5.2.1** die Brennweiten  $f(p) = f_{ak}(p) + \langle \Delta \rangle$  eingetragen.

## 6 Stichworte zur Vorbereitung

Licht als elektromagnetische Welle und Korpuskel (Photon), Zusammenhang von Wellenlänge, Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Brechungsgesetz von Snellius, Brechung und Totalreflexion und ihre Erklärung durch das Huygenssche Prinzip, Brechungsindex, reelle und virtuelle Bilder, Strahlengang durch Linsensysteme und ihre geometrische Konstruktion, Brechkraft, Brennweite, Hauptebene, Abbildungsgesetze, Linsenkombinationen, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung, Linsenfehler (sphärische Aberration, Dispersion).

Funktion und Aufbau des Auges.