Thema 1: Messfehler und Fehlerfortpflanzung

(g-Bestimmung mit Fadenpendel)

1 Einführung

Für alle mit Messen oder Zählen verbundenen Probleme in Wissenschaft, Technik, Medizin, Wirtschaft, etc., alle Probleme, bei denen aus einer endlichen Anzahl von Messungen bzw. Stichproben und/oder begrenzter Messgenauigkeit der Einzelmessungen ein verlässliches und verallgemeinerungsfähiges Resultat mit quantifizierbarer *Konfidenz* (= Vertrauenswürdigkeit) gewonnen werden soll, ist die Beherrschung der Algorithmen zur Messfehlerbehandlung notwendig.

Am Beispiel eines einfachen Experimentes, der Bestimmung der Erdgravitationsbeschleunigung g mit Hilfe eines Fadenpendels werden hier Messfehler und Fehlerfortpflanzung diskutiert.

Jedes Messverfahren, welches zur Bestimmung einer zu messenden Größe z dienen soll, ist mit *systematischen* und *stochastischen* Messfehlern behaftet.

Während die *systematischen* Fehler durch sorgfältige Analyse der Messmethode kontrolliert werden können, entstehen die *stochastischen* Fehler durch unvermeidbare Unvollkommenheiten der Messmethode. Letztere erzeugen eine zufällig verteilte (daher: „stochastische“) Streuung der Messergebnisse um den *Erwartungswert* (= „wahren“ Wert), also den Wert, den man im theoretischen Grenzfall beliebig genauer Messung erwarten würde.

Eine Größe z werde n-mal gemessen, und dabei n Ergebnisse z_k gewonnen. Für n unabhängige Messwerte z_k der Messgröße mit dem (unbekannten!) wahren Wert z definiert man die

$$\textit{Varianz} \qquad V_Z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(< z > - z_k)^2 \tag{1.1}$$

Sofern $< z >= \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ das arithmetische Mittel der n Messwerte z_k darstellt, *gilt nach einem von Gauß formulierten Satz, dass die Varianz einen Minimalwert annimmt.*

Die *Varianz* ist ein Maß für die Qualität einer durchgeführten Messreihe. Je kleiner sie ist, desto genauer stimmt der Mittelwert $< z >$ mit dem gesuchten wahren Wert z überein.

Unschön an der so definierten Größe ist, dass die Varianz als quadratischer Ausdruck eine andere Dimension als die Messgröße selbst hat (z.B. hat bei einer Zeitdauer-Messreihe die Varianz die Dimension s^2, und nicht s (Sekunde), wie das Ergebnis!).

Als Maß für die Streuung der Einzelmesswerte z_k um ihren Mittelwert $< z >$, und damit näherungsweise *um den unbekannten wahren Wert z der Messgröße*, definiert man deshalb eine Größe der selben Dimension wie die Messgröße, die

$$\textit{Standardabweichung} \qquad \sigma_Z = \pm\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(< z > - z_k)^2}{n-1}} = \pm\sqrt{V_z \cdot \frac{n}{n-1}} \tag{1.2}$$

Die Standardabweichung $< \sigma_z >$ vom (wahren) Erwartungswert z des aus den n Messwerten z_k berechneten Mittelwertes $< z >$ ist

$$< \sigma_Z >= \pm\sqrt{\frac{V_z}{n-1}} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}} \tag{1.3}$$

Die n-fache Wiederholung einer Einzelmessung z_k verringert also den aus stochastischen (d.h. nicht systematischen) Quellen herrührenden Fehler des Mittelwerts der Messergebnisse nur um den Faktor $\sqrt{n}$.

Sei nun eine Größe R aus mehreren unabhängig gemessenen Größen x, y,... zu berechnen.

Da x, y,... voneinander unabhängig gemessen wurden, sind auch ihre Messfehler voneinander unabhängig, addieren sich also nicht linear, sondern quadratisch gemäß dem

$$\textit{Fehlerfortpflanzungsgesetz} \qquad < \sigma_R >= \pm\sqrt{\left(< \sigma_x > \cdot \frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(< \sigma_y > \cdot \frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + \ldots,} \tag{1.4}$$

Wobei $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$,... die aus $R = R(x, y, \ldots)$ zu berechnenden *partiellen Ableitungen* von R nach x bzw. von R nach y, ... bedeuten.

2 Experiment

g-Bestimmung mit Fadenpendel

2.1 Grundlage

In diesem Versuch zu messende Größen sind

- Pendellänge L des Fadenpendels und
- Schwingungsperiodendauer T.

Der Zusammenhang mit der Erdbeschleunigung g ist gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1.5}$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz 1.4 berechnet sich dann die Standardabweichung $< \sigma_g >$ des Mittelwertes der Messwerte für g aus

$$< \sigma_G >= \pm\sqrt{\left(< \sigma_L > \cdot \frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 + \left(< \sigma_T > \cdot \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2} \tag{1.6}$$

Dabei sind $\frac{\partial g}{\partial L}$ und $\frac{\partial g}{\partial T}$ die aus Gl.1.5 zu berechnenden partiellen Ableitungen von g nach L, bzw. von g nach T.

In diese Ableitungen sind die arithmetischen Mittelwerte der Messergebnisse $< L >$ und $< T >$ einzusetzen.

$< \sigma_L >$ und $< \sigma_T >$ sind die zu $< L >$ bzw. $< T >$ gehörigen Standardabweichungen.

Nun kann das Messergebnis angegeben werden in der Form

$$g =< g > \pm < \sigma_g > \tag{1.7}$$

2.2 Aufgabenstellung

2.2.1 Die Fadenlänge L^* des Pendels wird 10 mal bestimmt und jeweils die Pendellänge $L = L^* + a + k^*$ berechnet. a und k^* sind Korrekturlängen für die Aufhängung und den Pendelkörper. Die Werte gibt der Betreuer an. Zu berechnen ist $L =< L > \pm < \sigma_L >$.

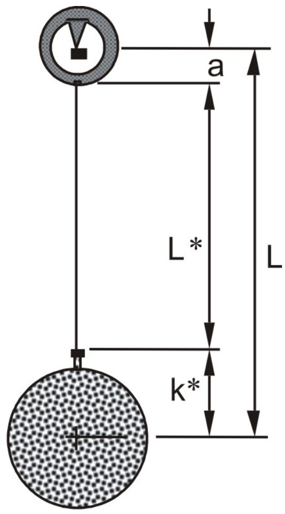

Abbildung 1.1: Pendel mit den verwendeten Längenangaben

2.2.2 Die Periodendauer T^* der Pendelschwingung wird mit der Stoppuhr $n = 100$ mal gemessen. Der arithmetische Mittelwert $< T >^*$ der 100 Messwerte T_k^* (mit $k = 1 \dots 100$) wird auf $1/100\,s$ gerundet zu $< T >$. Mit $\epsilon(T) =< T > - < T >^*$ wird

$$\sum_{k=1}^{n} (< T > - T_k^*)^2 = \sum_{k=1}^{n} (< T >^* - T_k^*)^2 - n \cdot \epsilon(T)^2 \qquad (1.8)$$

Anzugeben ist $T =< T > \pm < \sigma_T >$.

2.3 Auswertung der Häufigkeitsverteilung

Zur Darstellung der relativen Häufigkeitsverteilung von speziellen Messergebnissen T_k wird ein Balkenhistogramm der Messwerte $H(T_k)$, die (im Falle der Messung in **2.2.2**) jeweils in einem Intervall $\Delta T_j = 0.02\,s \quad j = 1 \dots 29$ liegen, über der Zeit T_k erstellt.

Die relative Häufigkeit $H_{rel}(T_k)$ ergibt sich aus $H_{rel}(T_k)_{\Delta T_j} = \frac{1}{n} H(T_k)_{\Delta T_j}$ mit $n = 100$.

Beginnen Sie die Intervallteilung der Zeitachse mit dem Intervall $\Delta T1 = 1.665\,s$ bis $1.685\,s$, und beenden Sie sie mit $\Delta T_{29} = 2.225\,s$ bis $2.245\,s$.

Vergleichen Sie die resultierende Verteilung Ihrer Messergebnisse mit der Gauß'schen Normalverteilung („Glockenkurve“), wie man sie für beliebig große Anzahl n von einzelnen Messergebnissen erwartet, indem Sie diese in das gleiche Histogramm eintragen.

Die einzutragenden Werte berechnen Sie aus

$$W(< T > - T) = \frac{1}{\sigma_T \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{\{< T > - T\}^2}{2\sigma_T^2}\right) \qquad (1.9)$$

wobei hier die in der Gaußverteilung auftretende Varianz σ^2 durch das Quadrat der Standardabweichungen σ_T^2 als Näherung ersetzt wurde. (σ = halbe Peakbreite der Verteilung in Höhe der Wendepunkte, bei $1 = e$ vom Maximum)

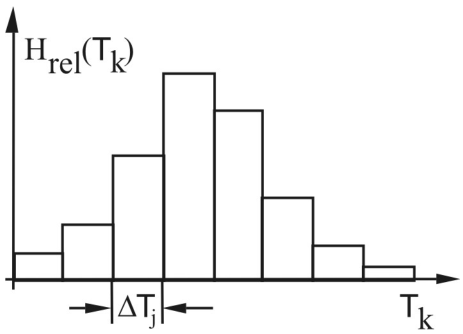

Abbildung 1.2: Balkenhistogramm der Messwerte $H(T_k)$.

Anm.: Die Gauß'sche Normalverteilung $f(< T > - T) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{\{<T>-T\}^2}{2\sigma^2}\right)$ mit der Varianz σ^2 gibt den Grenzfall $n \to \infty$ bei n Einzelmessungen an einer stochastisch streuenden Messwertverteilung.

Auswertetabelle:

$\frac{<T>-T}{\sigma_T}$	$exp\left(-\frac{\{<T>-T\}^2}{2\sigma^2}\right)$	$\pm(< T > -T)$ [in s]	$W(< T > -T) \cdot \Delta T$
0,000	1,000		
0,500	0,882		
1,000	0,607		
1,500	0,325		
2,000	0,135		
3,000	0,011		

Weicht das Messwertehistogramm erheblich von der Gauß'schen Glockenkurve ab, so dass es z.B. eine deutlich zweihöckerige, rechteckige oder schiefe Verteilungsfunktion ergibt, so ist das ein deutlicher Hinweis auf systematische Messfehler.

Es könnten im einfachsten Fall subjektive systematische Fehler aufgetreten sein, - etwa bestimmte Ergebniswerte bevorzugt abgelesen, - oder stark vom vermuteten Mittelwert abweichende Messwerte willkürlich vor der Auswertung (!) aussortiert worden sein.

In schwierigeren Fällen könnte sich auch herausstellen, dass das Messverfahren für diese Fragestellung nicht adäquat war.

Jedenfalls ist eine Berechnung des mittleren Messfehlers nach dem hier beschriebenen Verfahren nur möglich, wenn die Verteilung der gemessenen Einzelwerte um ihren Mittelwert ungefähr einer Gauß-Verteilung (Glockenkurve) ähnelt. In allen anderen Fällen müssen zuvor die systematischen Fehler extrahiert und ihre Größe bestimmt werden, bevor es möglich wird, eine Standardabweichung σ für das Messergebnis anzugeben.

Geben Sie als Endergebnis Ihren Messwert für die Erdbeschleunigung $g =< g > \pm < \sigma_g >$ an und vergleichen Sie ihn mit dem Literaturwert. Diskutieren Sie kurz die möglichen Ursachen für eventuell beobachtete Abweichungen!

Einige Stichworte als Starthilfe zur Vorbereitung

Kinetische und potentielle Energie, Arbeit, Winkelfrequenz, Winkelgeschwindigkeit , Winkelbeschleunigung, Drehmoment, Trägheitsmoment, Rückstellkraft, Frequenz, Schwingungsdauer und Amplitude eines Fadenpendels Mittelwert, Erwartungswert, relativer und absoluter Fehler, systematische und zufällige (stochastische) Fehler, Varianz und Standardabweichung, Streuung, Gauß-Verteilung, Fehlerfortpflanzung, Wahrscheinlichkeitsdichte.